Les fonctions numériques

Généralités

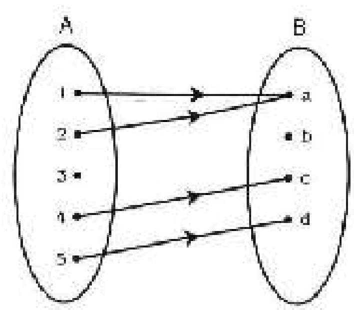
Définition générale d'une fonction

Définition 1 .
*On appelle **fonction** f la donnée d'un ensemble E, d'un ensemble F et d'un « procédé » qui permet d'associer à un élément x de E au plus un élément $y = f(x)$ de F. Cet élément y, quand il existe, est **l'image** de x, et x est appelé un **antécédent** de y.*
*On appelle E **l'ensemble de départ** de f, F **l'ensemble d'arrivée** de f.*

Remarque 2 *Il faut faire la différence entre la fonction f qui représente une relation et $f(x)$ qui représente l'image de x par f qui est un élément.*

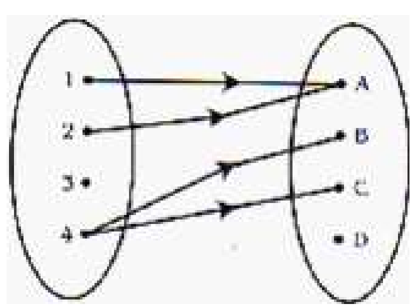
Exemple 3 .

♣ *La figure donnée représente une fonction ?*



Sur la figure aucun élément de l'ensemble de départ n'est à l'origine de deux flèches ou plus, cela représente une fonction.

♣ *La figure donnée représente une fonction ?*



Sur la figure la valeur d'entrée 4 est associée à deux valeurs de sortie, par conséquent cela ne représente pas une fonction.

Remarque 4 .

La notation fonctionnelle met en évidence les 3 caractéristiques d'une fonction

$$\begin{array}{rccc} f & : \quad \text{ensemble de départ} & \longrightarrow & \text{ensemble d'arrivée} \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

Exemple 5 .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^2+2x-3 \end{array}$$

On peut calculer l'image de 1 : $f(1) = 1^2 + 2 \times 1 - 3 = 0$. C'est-à-dire 0 est l'image de 1 par la fonction f.

Remarque 6 .

$f(x) = 2x + 3$ signifie que l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée de f sont égaux à $\mathbb{R}$.

L'ensemble de définition d'une fonction

Définition 7 .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x.

L'ensemble de définition de la fonction f est l'ensemble des nombres réels x qui possèdent une image par cette fonction. L'ensemble de définition de la fonction f est noté : D_f tel que :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \quad f(x) \in \mathbb{R}\}$$

Exemple 8 *Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :*

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}\ , \quad h(x) = \sqrt{x-1}\ , \ g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1} \quad et \quad M(x) = \frac{1}{2x^2+x-3}$$

- *On a*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \quad x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \quad x \neq 1\} \\ &= \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc $D_f = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

- *On a*

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R} / \quad x-1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \quad x \geq 1\} \\ &= \left[1, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc $D_h = \left[1, +\infty\right[$.

- *On a*

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ \ x^2 - 1 \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ x - 1 \neq 0 \ \ et \ \ x+1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ x \neq 1 \ \ et \ \ x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &=]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[\end{aligned}$$

donc $D_g =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$

- *On a*

$$D_M = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x^2 + x - 3 \neq 0\right\}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $2x^2 + x - 3 = 0$, *le discriminant de l'équation* $\Delta = 25$ *donc les deux solutions de l'équation sont :* $\dfrac{-3}{2}$ *et* 1, *d'où*

$$D_M = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-3}{2}, 1\right\}$$

Remarque 9 .

♣ *Une fonction polynôme est définie sur* $\mathbb{R}$.

♣ *L'ensemble de définition des fonctions* $x \longmapsto \cos x$ *et* $x \longmapsto \sin x$ *est* $\mathbb{R}$.

♣ *La fonction* $x \longmapsto \tan x$ *est définie sur* $\mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

Égalité de deux fonctions

Définition 10 .

Soient f *et* g *deux fonctions numériques.*
On dit que f *et* g *sont égales si et seulement si :*

♣ *elles ont le même ensemble de définition :* $D_f = D_g$

♣ *Pour tout réel* x *de cet ensemble de définition :* $f(x) = g(x)$.

Exemple 11 *On considère les deux fonctions numériques* f *et* g *définies par :*

$$f(x) = |x+2| \quad et \quad g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4}$$

Est-ce-que les fonctions f *et* g *sont égales ?*
On a $D_f = \mathbb{R}$.
On a

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \ x^2 + 4x + 4 \geq 0\right\}$$

comme : $x^2 + 4x + 4 = (x+2)^2 \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *donc* $D_g = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

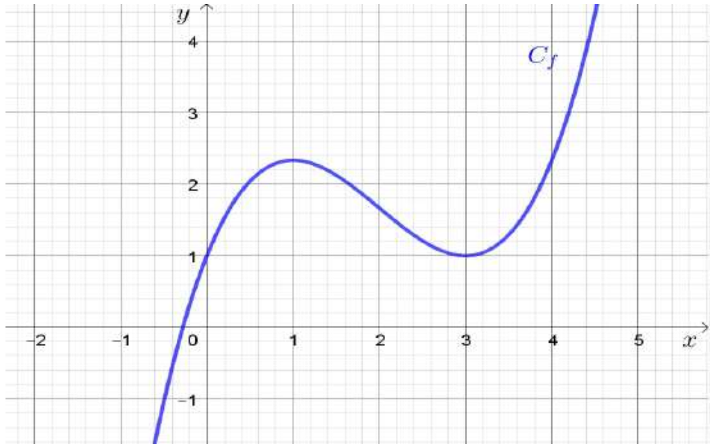
$$g(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = f(x)$$

d'où : $f = g$ *sur* $\mathbb{R}$.

Graphe d'une fonction

Définition 12 .

La courbe représentative d'une fonction f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où x parcourt le domaine de définition D_f de f, elle est souvent notée (C_f).



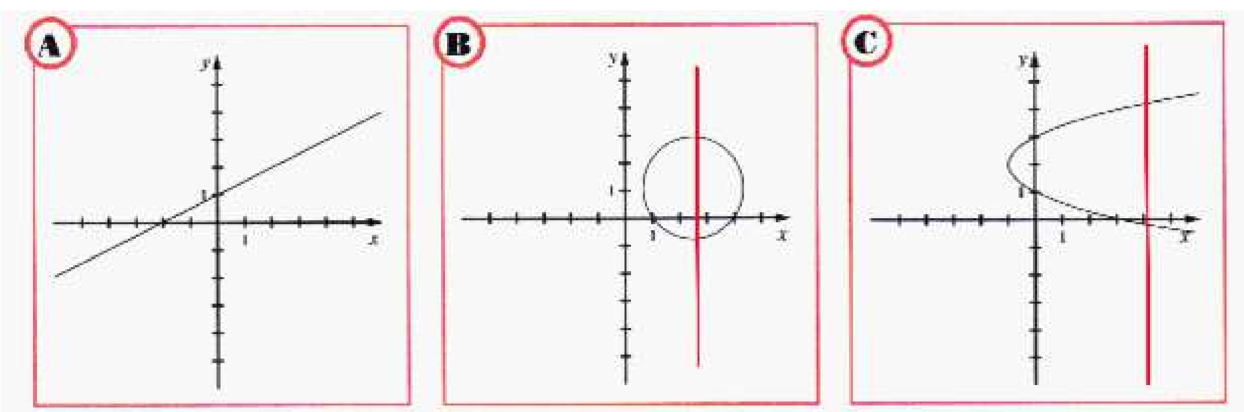
Remarque 13 .

La définition signifie :

$$M(x, y) \in (C_f) \quad \text{équivaut à} \ : \ y = f(x) \ \text{ et } x \in D$$

Exemple 14 .

On considère les graphes suivants :



Les graphiques B et C ne représentent pas des fonctions car la droite verticale rouge peut les couper en plus d'un point.

Le graphe A représente une fonction.

Fonction paire - Fonction impaire

Fonction paire.

Définition 15 .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie sur D_f. La fonction f est dite paire si, et seulement si :

- *Pour tout* $x \in D_f$ *on a :* $-x \in D_f$.

- *Pour tout* $x \in D_f$ *on a :* $f(-x) = f(x)$.

Exemple 16 .

Soit f *la fonction numérique de la variable réelle définie par :* $f(x) = x^2 + |x|$.
Montrer que la fonction f *est paire.*
On a : $D_f = \mathbb{R}$
Pour tout $x \in D_f$ *on a :* $-x \in D_f$
Soit $x \in D_f$, *on a*

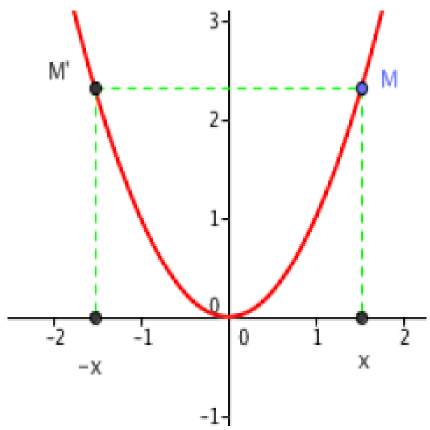
$$f(-x) = (-x)^2 + |-x| = x^2 + |x| = f(x)$$

donc la fonction f *est paire.*

Interprétation géométrique de la fonction paire.

Propriété 17 .

Soit f *une fonction numérique de la variable réelle* x *et* (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. *La fonction* f *est paire si, et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.*



Fonction impaire

Définition 18 .

Soit f *la fonction numérique de la variable réelle* x *définie sur* D_f. *La fonction* f *est dite impaire si, et seulement si :*

- *Pour tout* $x \in D_f$ *on a :* $-x \in D_f$.

- *Pour tout* $x \in D_f$ *on a :* $f(-x) = -f(x)$.

Exemple 19 .

Soit f *la fonction numérique de la variable réelle* x *définie par :* $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x}$.
Montrer que la fonction f *est impaire.*
On a : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq 0\} = \mathbb{R}^*$.

Pour tout x de D_f on a : $-x \in D_f$.
Soit $x \in D_f$, on a

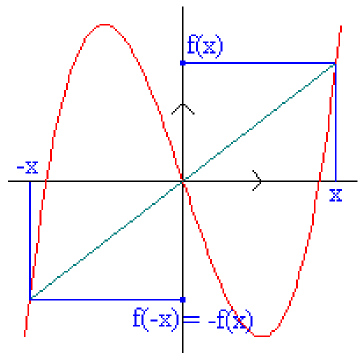
$$f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{-x} = -\frac{x^2+1}{x} = -f(x). \qquad (2)$$

1. *donc la fonction f est impaire.*

Interprétation géométrique de la fonction impaire

Propriété 20 *Soit f une fonction numérique de la variable réelle x et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

La fonction f est impaire si, et seulement si sa courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.



Remarque 21 .

♣ *Pour montrer qu'une fonction f n'est pas paire, il suffit de trouver un nombre a tel que : $f(-a) \neq f(a)$.*

♣ *Pour montrer qu'une fonction f n'est pas impaire, il suffit de trouver un nombre a tel que : $f(-a) \neq -f(a)$.*

Remarque 22 .

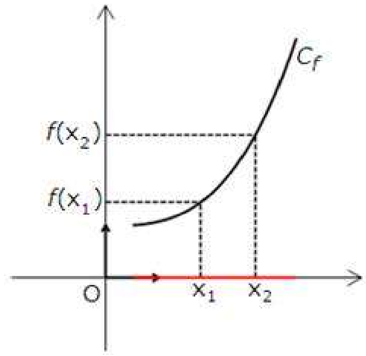
Si f est une fonction paire ou impaire, alors il suffit de l'étudier sur $\mathbb{R}^+ \cap D_f$ ou $\mathbb{R}^- \cap D_f$.

Variations d'une fonction

Définition 23 *Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I.*

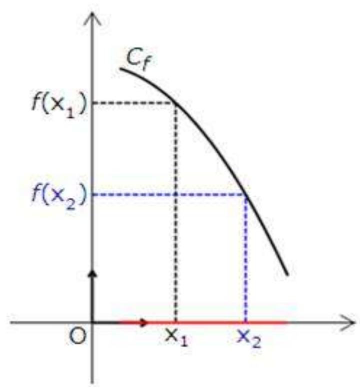
- *f est croissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \leq f(x_2)$.*

- *f est strictement croissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) < f(x_2)$*

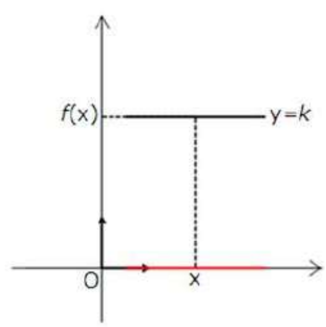


- *f est décroissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 \leq x_2$ alors $f(x_1) \geq f(x_2)$.*

- *f est strictement décroissante sur l'intervalle I si pour tout $x_1 \in I$, pour tout $x_2 \in I$, $x_1 < x_2$ alors $f(x_1) > f(x_2)$.*



- *f est constante sur l'intervalle I s'il existe un réel k tel que pour tout $x \in I$, $f(x) = k$.*



- *La fonction f est dite monotone sur I si et seulement si elle est croissante ou décroissante sur I.*

- *La fonction f est dite strictement monotone sur I si et seulement si elle est strictement croissante ou strictement décroissante sur I.*

Exemple 24 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 1$.

Étudier la monotonie de la fonction f sur $[0, +\infty[$ et $]-\infty, 0]$.

♣ *Soit a et b deux éléments de $[0, +\infty[$ tels que : $a < b$.*

On a $a < b$ alors $a^2 < b^2$ par suite $a^2 + 1 < b^2 + 1$ donc $f(a) < f(b)$ d'où f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

♣ *Soient a et b deux éléments de $]-\infty, 0]$ tels que : $a < b$.*

On a $a < b$ alors $a^2 > b^2$ par suite $a^2 + 1 > b^2 + 1$ donc $f(a) > f(b)$ d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

Exemple 25 .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x+1}$.

Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $]-1, +\infty[$ et $]-\infty, -1[$.

♣ *Soit a et b deux éléments de $]-1, +\infty[$ tels que : $a < b$.*

On a $a < b$ alors $a + 1 < b + 1$ et comme $a + 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{a+1} > \dfrac{1}{b+1}$ c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. D'où la fonction f est strictement décroissante sur $]-1, +\infty[$.

♣ *Soit a et b deux éléments de $]-\infty, -1[$ tels que : $a < b$.*

On a $a < b$ alors $a + 1 < b + 1$ et comme $a + 1 > 0$ donc $\dfrac{1}{a+1} > \dfrac{1}{b+1}$ c'est-à-dire $f(a) > f(b)$. D'où la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty, -1[$.

Étude des variations

- Pour résumer les variations d'une fonction sur son domaine de définition on dresse un tableau de variation.
- Une flèche montante indiquant la croissance stricte et une descendante indiquant la décroissance stricte.

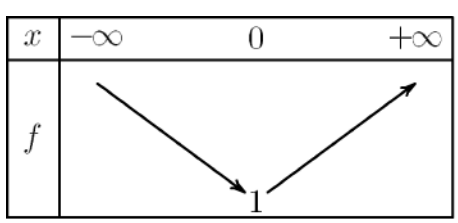
Exemple 26 .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ qui vérifie :

- *f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.*
- *f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$ et $f(0) = 1$.*

Donner le tableau de variation de la fonction f.

Le tableau de variation de la fonction f



Taux de variations d'une fonction

Propriété 27 .

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I. pour tous x et y deux éléments ***distincts*** *de I. Le taux de variation de la fonction f entre x et y est :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \geq 0$ *alors f est croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0$ *alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} \leq 0$ *alors f est décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0$ *alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = 0$ *alors f est constante sur I.*

Exemple 28 .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = x + \frac{4}{x}$$

1. *Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{xy-4}{xy}$.
2. *Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2,+\infty[$ et $]0,2]$.*

♣ *Montrons que :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} = \dfrac{xy-4}{xy}$.

Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{x+\dfrac{4}{x}-\left(x+\dfrac{4}{x}\right)}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\dfrac{4}{x}-\dfrac{4}{y}}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\dfrac{4y-4x}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{\dfrac{xy\left(x-y\right)+4\left(y-x\right)}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{xy\left(x-y\right)-4\left(x-y\right)}{xy\left(x-y\right)} \\
&= \frac{\left(x-y\right)\left(xy-4\right)}{xy\left(x-y\right)} \\
&= \frac{xy-4}{xy}
\end{aligned}$$

♣ *La monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2,+\infty[$ et $]0,2]$.*

- ♠ *Soit x et y deux éléments de $[2,+\infty[$ tels que : $x \neq y$.*
  On a : $x \geq 2$ et $y \geq 2$ alors $xy \geq 4$ et comme $x \neq y$ donc $xy > 4$ d'où $xy-4>0$, et comme $xy>0$. Donc

  $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \text{où } x,y \in [2,+\infty[\text{ et } x \neq y$$

  Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.
- ♠ *Soit x et y deux éléments de $]0,2]$ tels que : $x \neq y$.*
  On a : $0 < x \leq 2$ et $0 < y \leq 2$ alors $0 < xy \leq 4$ et comme $x \neq y$ donc $0 < xy < 4$ d'où $-4 < xy-4 < 0$, et comme $xy > 0$. Donc

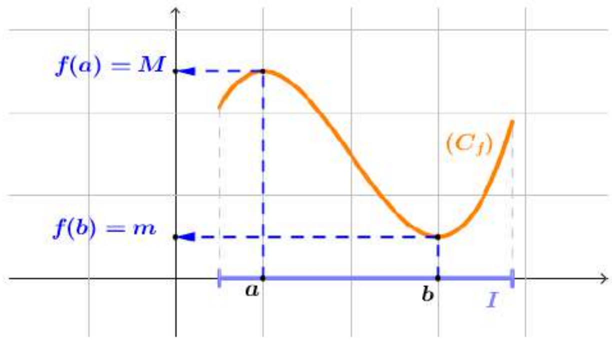
  $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \quad \text{où } x,y \in]0,2] \text{ et } x \neq y$$

  Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $]0,2]$.

Extremum d'une fonction

Définition 29 .
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un élément de I.

1. *On dit que $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.*



2. *On dit que $f(b)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \geq f(b)$ pour tout $x \in I$.*

Remarque 30 *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

Exemple 31 *On considère la fonction f définie sur $I = [-7, 3]$ par :*

x	-7		-4		0		3
f	-5	$\nearrow$	4	$\searrow$	-4	$\nearrow$	5

♣ *-5 est une valeur minimale absolue de f sur I atteinte en $x = 7$.*

♣ *5 est une valeur maximale absolue de f sur I atteinte en $x = 3$.*

♣ *4 est une valeur maximale locale de f sur I atteinte en $x = -4$.*

♣ *-4 est une valeur minimale locale de f sur I atteinte en $x = 0$.*

Représentation graphique des fonctions de références

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2$ avec $a \neq 0$.

Soit a un réel non nul. On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

La parité de la fonction f.

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $-x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$f(-x) = a(-x)^2 = ax^2 = f(x)$$

Donc, la fonction f est paire. Ceci signifie que la courbe (C_f) est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

Variations de f.

Propriété 32 .

- *Si $a > 0$, alors la fonction f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$ et strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.*
- *Si $a < 0$, alors la fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$.*

Démonstration 33 .

Soient x et y deux réels de $\mathbb{R}$ tels que : $x \neq y$, on a

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{ax^2 - ay^2}{x - y} = \frac{a\,(x - y)\,(x + y)}{x - y} = a\,(x + y)$$

1er cas. Si $a > 0$.

- *Soient x et y deux éléments distincts de $[0, +\infty[$, c'est-à-dire : $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc $x + y \geq 0$ et comme $x \neq y$, alors $x + y > 0$. Donc*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} > 0 \quad \text{où } x, y \in [0, +\infty[\ \text{ et } x \neq y$$

d'où f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$.

- *Soient x et y deux éléments distincts de $]-\infty, 0]$, c'est-à-dire : $x \leq 0$ et $y \leq 0$, donc $x + y \leq 0$ et comme $x \neq y$, alors $x + y < 0$. Donc*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \text{où } x, y \in \,]-\infty, 0] \ \text{ et } x \neq y$$

d'où f est strictement décroissante sur $]-\infty, 0]$.

2ème cas. *Si $a < 0$.*

La fonction f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et strictement croissante sur $]-\infty, 0]$. (La démonstration est similaire à celle du premier cas).

Conclusion 34 .

1ér cas *Si* $a > 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\searrow$	0	$\nearrow$	

2éme cas *Si* $a < 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\searrow$	

Représentation graphique de la fonction f

Définition 35 .

La courbe représentative de la fonction f *est appelée parabole de sommet l'origine* O *et un axe de symétrie qui est l'axe des ordonnées.*

Exemple 36 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2$$

1. *Dresser le tableau de variations de la fonction* f.
2. *Tracer la courbe représentative de fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{a}{x}$ avec $a \neq 0$.

Soit a un réel non nul. On considère f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x) = \frac{a}{x}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

La parité de la fonction f.

On a : $D_f = \mathbb{R}^*$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ on a : $-x \in \mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, on a

$$f(-x) = \frac{a}{-x} = -(\frac{a}{x}) = -f(x)$$

Donc, la fonction f est impaire. C'est-à-dire (C_f) est symétrique par rapport à l'origine du repère.

Variations de f.

Propriété 37 .

- *Si* $a > 0$, *alors la fonction* f *est strictement décroissante sur les intervalles* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0[$.
- *Si* $a < 0$, *alors la fonction* f *est strictement croissante sur les intervalles* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0[$.

Démonstration 38 .
Soient x *et* y *deux réels de* $\mathbb{R}^*$ *tels que :* $x \neq y$, *on a*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} = \frac{\dfrac{a}{x} - \dfrac{a}{y}}{x - y} = \frac{a(y - x)}{xy\,(x - y)} = -\frac{a}{xy}$$

1er cas. Si $a > 0$.

- *Soient* x *et* y *deux éléments distincts de* $]0, +\infty[$, *c'est-à-dire :* $x > 0$ *et* $y > 0$, *donc* $xy > 0$ *et comme* $-a < 0$, *alors*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \text{où } x, y \in \left]0, +\infty\right[\text{ et } x \neq y$$

  D'où la fonction f *est strictement décroissante sur* $]0, +\infty[$.

- *Soient* x *et* y *deux éléments distincts de* $]-\infty, 0[$, *c'est-à-dire :* $x < 0$ *et* $y < 0$, *donc* $xy > 0$ *et comme* $-a < 0$, *alors*

$$\frac{f(x) - f(y)}{x - y} < 0 \quad \text{où } x, y \in \left]0, +\infty\right[\text{ et } x \neq y$$

  D'où f *est strictement décroissante sur* $]-\infty, 0[$.

2ème cas. *Si* $a < 0$. *La fonction* f *est strictement croissante sur les intervalles* $]0, +\infty[$ *et* $]-\infty, 0[$. (*La démonstration est similaire à celle du premier cas*).

Conclusion 39 .

1er cas. *Si* $a > 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\searrow$	$\|$	$\searrow$

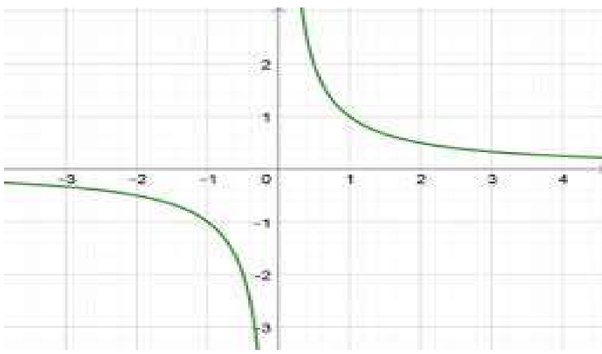
2ème cas. *Si* $a < 0$

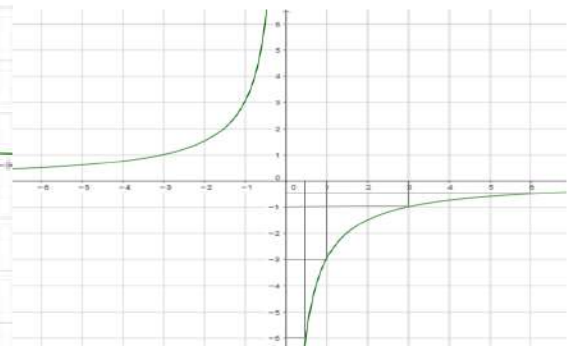
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

Représentation graphique de la fonction f

Définition 40 .

La courbe représentative de la fonction f *est appelée hyperbole de centre* O *l'origine du repère et les droites* $x = 0$ *et* $y = 0$ *sont les deux asymptotes de la courbe.*





Exemple 41 .

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$f(x) = \frac{2}{x}$$

1. *Dresser le tableau de variation de la fonction* f.

2. *Tracer la courbe représentative de la fonction* f *dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 42 *Une fonction polynôme de degré* 2 *est une fonction* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* a, b *et* c *des réels et* $a \neq 0$.

Variations de f

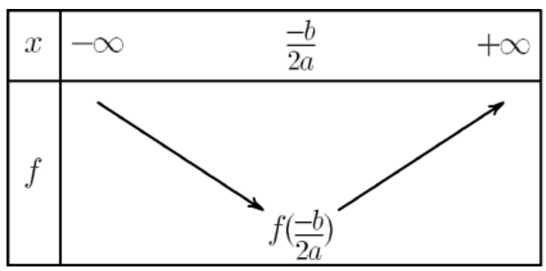
Propriété 43 .

- Si $a > 0$, *alors la fonction f est strictement croissante sur* $\left[\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$ *et strictement décroissante sur* $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right]$.
- Si $a < 0$, *alors la fonction f est strictement décroissante sur* $\left[\dfrac{-b}{2a}, +\infty\right[$ *et strictement croissante sur* $\left]-\infty, \dfrac{-b}{2a}\right]$.

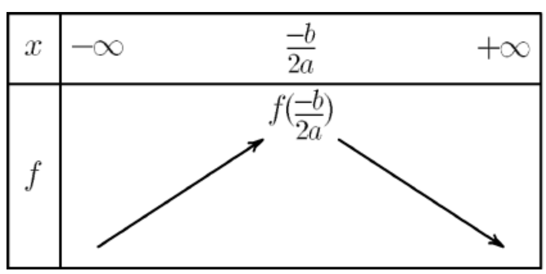
Démonstration 44 *Admis*

Conclusion 45 .

1er cas Si $a > 0$.

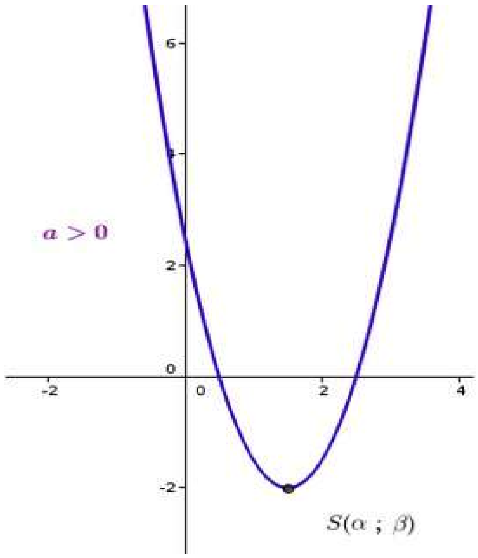


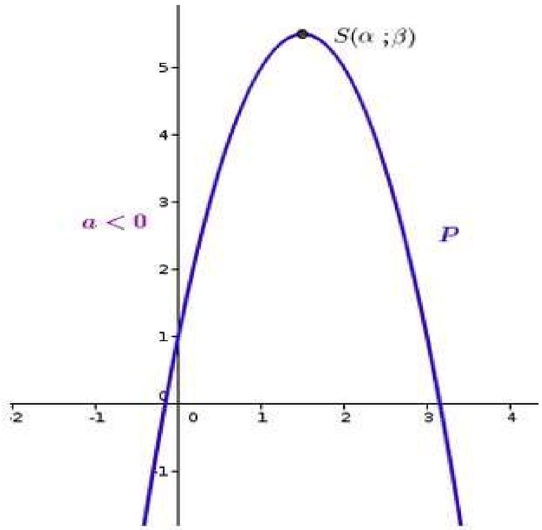
2ème cas Si $a < 0$.



Représentation graphique de la fonction f.

La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole de sommet $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.





Exemple 46 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. *Dresser le tableau de variation de la fonction f.*
2. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \frac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels et $c \neq 0$.

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 47 .

On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b et $c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$.

- **L'ensemble de définition de la fonction de** f

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ cx + d \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ cx \neq -d\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \neq \frac{-d}{c}\right\} \\ &= \left]-\infty, \frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}, +\infty\right[\end{aligned}$$

- **Variations de** f.

  – 1er cas. Si : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0.$

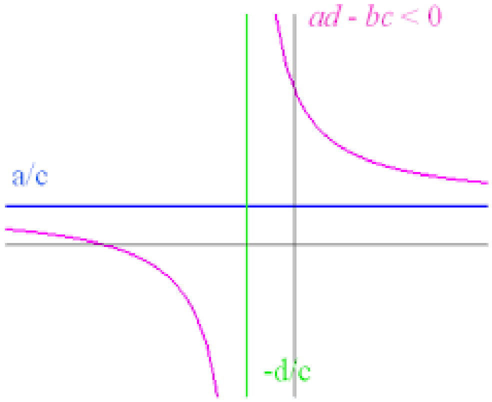
x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

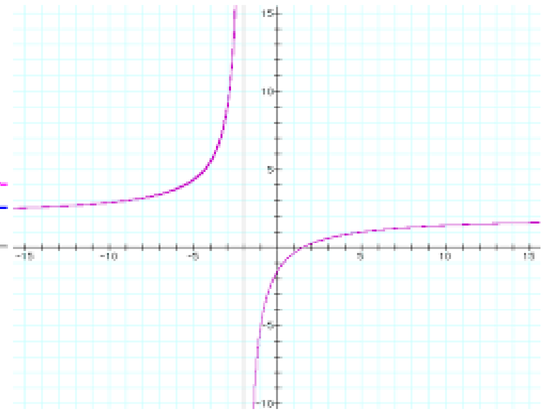
  – 2ème cas. Si : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0.$

x	$-\infty$	$\frac{-d}{c}$	$+\infty$
f	$\nearrow$	$\Vert$	$\nearrow$

- **Représentation graphique de la fonction** f.

  La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole et le point $\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, son centre de symétrie,et les droites d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ sont ses deux asymptotes.





Exemple 48 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

1. *Déterminer D_f.*

2. *Dresser le tableau de variation de la fonction f.*

3. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com