www.etude-generale.com **1ère BAC S-EXP**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Rotation

Rotation - Rotation réciproque

Rotation

Définition 1 .
Soit Ω un point du plan (P) orienté dans le sens direct et α un réel.
On appelle la rotation de centre Ω et d'angle α la transformation du plan, qui à chaque point M du plan associe le point M' tel que :

♣ Si $M = \Omega$ *alors* $M' = \Omega$.

♣ Si $M \neq \Omega$ *alors* $\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha\,[2\pi] \end{cases}$

Notations et vocabulaire 2 .

♣ *La notation de centre Ω et d'angle α est notée $r(\Omega, \alpha)$.*

♣ Si $r(M) = M'$ *on dit que M' est l'image de M par la rotation r.*

♣ $r(\Omega) = \Omega$ *on dit que le centre de la rotation est un point invariant.*

♣ $r(M) = M' \iff \begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ \left(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'}\right) \equiv \alpha\,[2\pi] \end{cases}$ *avec* $M \neq \Omega$.

Rotations particulières

On considère la rotation r de centre Ω et d'angle α et M' l'image de M par r.

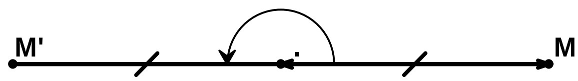
♣ Si $\alpha = 0$ alors $r(M) = M$. (On dit que tout point du plan est invariant).

La rotation de centre Ω et d'angle α=0

Les deux points M et M' sont confondus

♣ Si $\alpha = \pi$ alors la rotation $r(\Omega, \pi)$ est la symétrie centrale de centre Ω. On note $r(\Omega, \pi) = S_{\Omega}$

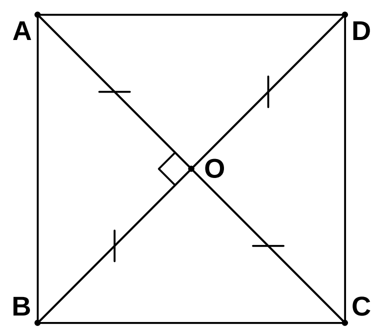
La rotation de centre Ω et d'angle $\alpha=\pi$



Ω est le milieu de $[MM']$

Exemple 3 .

On considère la figure ci-contre



♣ *On a* $OA = OB$ *et* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *donc* B *est l'image de* A *par la rotation* r *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$. *on note par* $r(A) = B$.

♣ *De même On a* $OC = OD$ *et* $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *donc* $r(C) = D$.

Rotation réciproque d'une rotation

Définition 4 .

La rotation $r(\Omega, -\alpha)$ *de centre* Ω *et d'angle* $-\alpha$ *est appelée la rotation réciproque de la rotation* $r(\Omega, \alpha)$. *On note* $r(\Omega, -\alpha) = r^{-1}$.

$$r(M) = M' \iff r^{-1}(M') = M$$

Propriétés

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan et $r(\Omega, \alpha)$ la rotation de centre Ω et d'angle α.

Rotation et angle

Propriété 5 .

Si $r(A) = A'$ *et* $r(B) = B'$, *alors* $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A'B'}\right) \equiv \alpha\,[2\pi]$.

Propriété 6 .

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$, $r(C) = C'$ *et* $r(D) = D'$ *alors*

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}\right) [2\pi]$$

On dit que la rotation conserve les mesures d'angles orientés

Rotation et distance

Propriété 7 .

Si $r(A) = A'$ *et* $r(B) = B'$, *alors*

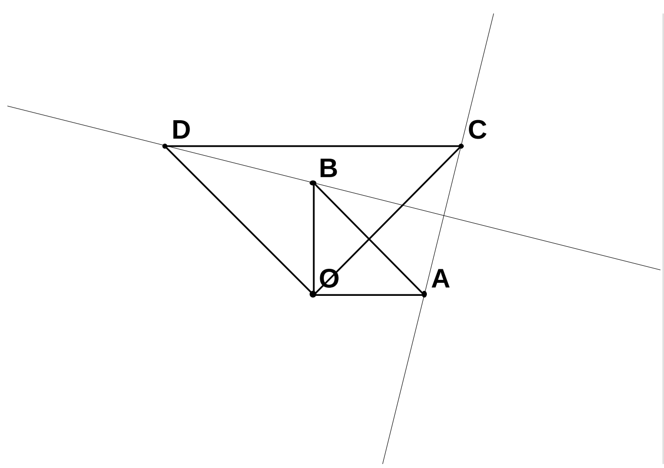
$$AB = A'B'$$

On dit que la rotation conserve la distance

Exemple 8 .

OAB *et* OCD *sont deux triangles rectangles isocèles au sommet commun* O *et* r *la rotation de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$ *tels que :* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *et* $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

1. *Déterminer les images des points* A *et* C *par la rotation* r.
2. *Montrer que :* $AC = BD$ *et* $(AC) \perp (BD)$.



On considère la rotation r *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

♣ *Le triangle OAB est rectangle isocèle en O, donc $OA = OB$ et puisque $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ alors le point B est l'image de A par la rotation r. C'est-à-dire $r(A) = B$.*

♣ *Le triangle OCD est rectangle isocèle en O, donc $OC = OD$ et puisque $\left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ alors $r(C) = D$.*

Donc on obtient $r(A) = B$ et $r(C) = D$ et comme la rotation conserve la distance donc $AC = BD$. D'autre part l'angle de la rotation r est une mesure de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}}\right)$ c'est-à-dire $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. Donc les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux. Ainsi les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires.

Exemple 9 .

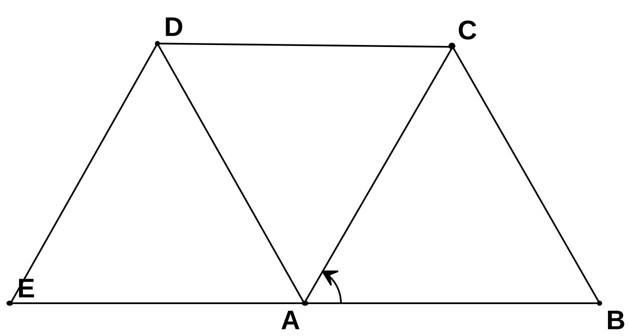
ABC est un triangle équilatéral tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.

Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. *Tracer les points D et E tels que $r(C) = D$ et $r(D) = E$.*
2. *Montrer que : $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.*
3. *Déduire la mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CE}}\right)$.*

♣ *On a $r(C) = D$ donc $AC = AD$ et $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$ et $r(D) = E$ donc $AD = AE$ et $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]$.*

On déduit que les deux triangles ACD et ADE sont équilatéraux.



♣ *Montrons que :* $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

On a $AB = BC = CD = DA$, *donc* $ABCD$ *est un losange. D'où* $(BD) \perp (AC)$.
Par suite $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

♣ *Déduisons la mesure de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CE}}\right)$.

On a $r(A) = A$, $r(B) = C$, $r(C) = D$ *et* $r(D) = E$, *donc* $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CE}\right)[2\pi]$ *et comme* $\left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$ *donc* $\left(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. *Car la rotation conserve les mesures des angles orientés.*

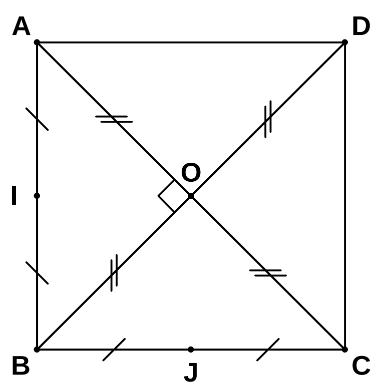
Rotation et milieu

Propriété 10 .

Soit I *est le milieu du segment* $[AB]$.
Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ *et* $r(I) = I'$ *alors* I' *est le milieu du segment* $[A'B']$. (*On dit que la rotation conserve le milieu d'un segment*).

Exemple 11 .

Sur la figure suivante



On place I *milieu de* $[AB]$ *et* J *l'image de* I *par la rotation* r *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.
Montrons que J *est le milieu de* $[BC]$.
On a $r(A) = B$, $r(I) = J$ *et* $r(B) = C$. *Comme* I *est le milieu de* $[AB]$ *alors* J *est le milieu de* $[BC]$. (*Conservation du milieu d'un segment*).

Rotation et vecteurs

Propriété 12 .

Soient $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ *et* $r(C) = C'$.
Si $\overrightarrow{AC} = k.\overrightarrow{AB}$ *alors* $\overrightarrow{A'C'} = k\overrightarrow{A'B'}$ (*où* $k \in \mathbb{R}^*$).
On dit que la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

On dit aussi que la rotation conserve l'alignement des points.

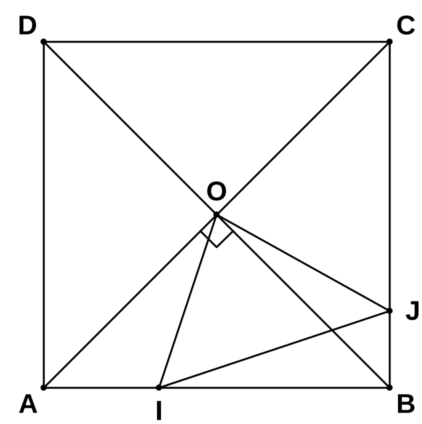
Exemple 13 .

$ABCD$ est un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

I et J deux points tels que : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrons que : $r(I) = J$.



1. ♣ *On a* $r(A) = B$ *car* $OA = OB$ *et* $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$, *et* $r(O) = O$.

   On pose $r(I) = I'$ *comme* $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *alors* $\overrightarrow{BI'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ *car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs. On sait que* $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$, *on déduit que* $\overrightarrow{BI'} = \overrightarrow{BJ}$ *donc* $I' = J$ *et par suite*

$$r(I) = J.$$

Rotation et barycentre

Propriété 14 .

Soit G le barycentre des points (A, α) et (B, β).

Si $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(G) = G'$ alors G' est le barycentre des points (A', α) et (B', β). On dit que la rotation conserve le barycentre de deux points.

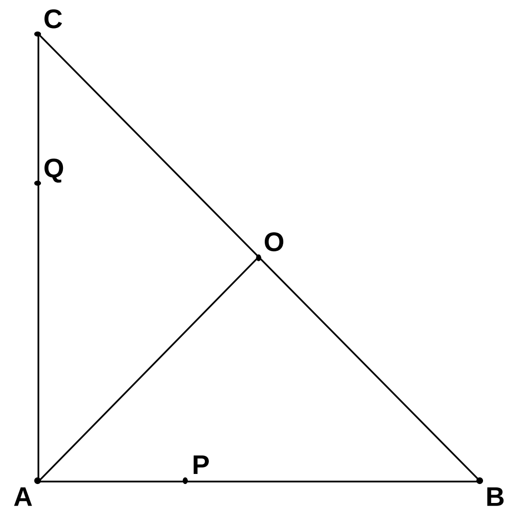
Exemple 15 .

ABC est un triangle rectangle isocèle en A tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$. *$P$ et Q deux points du plan tels que P est le barycentre de $(A, 2)$ et $(B, 1)$ et Q est le barycentre de $(A, 1)$ et $(C, 2)$ .Soit r la rotation de centre O milieu du segment $[BC]$ et d'angle* $\frac{\pi}{2}$.

1. *Montrer que :* $r(A) = B$ *et* $r(C) = A$.

2. *Montrer que P est l'image de Q par la rotation r.*

♣ *On a P est le barycentre de $(A,2)$ et $(B,1)$ donc $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. De plus Q est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$ donc $\overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.*



On a ABC est un triangle rectangle en A et O est le milieu de $[BC]$. Donc $OA = OB = OC$ et $(OA) \perp (BC)$.

On a donc

$$\begin{cases} OA = OB \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \iff r(A) = B \quad \text{et} \quad \begin{cases} OC = OA \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \iff r(C) = A$$

♣ *Montrons que P est l'image de Q par la rotation r.*

On pose $r(Q) = Q'$. On a $\begin{cases} r(C) = A \\ r(Q) = Q' \\ r(A) = B \end{cases}$ *et Q est le barycentre de $(A,1)$ et $(C,2)$.*

Donc Q' est le barycentre de $(B,1)$ et $(A,2)$ car la rotation conserve le barycentre. Comme P est le barycentre de $(B,1)$ et $(A,2)$. Donc $\overrightarrow{AQ'} = \overrightarrow{AP}$. D'où $P = Q'$ par suite $r(Q) = P$.

Exercice 16 .

Dans le plan orienté, on considère un carré de centre O tel que : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[2\pi]$.

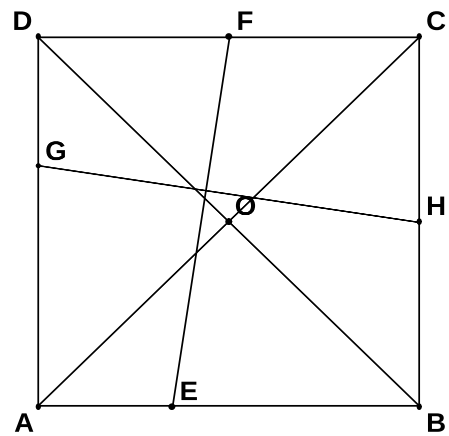
Soient E et G deux points définis par : $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

F et H sont les milieux respectifs des segments $[CD]$ et $[BC]$.

Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$.

1. *Tracer une figure.*
2. *Déterminer* $r(A)$ *et* $r(B)$.
3. *Montrer que* $r(E) = G$.
4. *Déterminer* $r(F)$.
5. *Déduire que* $(EF) \perp (GH)$.

♣ *La figure*



♣ *On cherche* $r(A)$ *et* $r(B)$:

$$\text{On a } \begin{cases} OA = OD \\ \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OD}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \text{ donc } r(A) = D.$$

$$\text{On a } \begin{cases} OB = OA \\ \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \text{ donc } r(B) = A.$$

♣ *Montrons que :* $r(E) = G$.

$$\text{On pose } r(E) = E' \text{ et on a } \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \text{ et comme } \begin{cases} r(A) = D \\ r(B) = A \\ r(E) = E' \end{cases} \text{ alors } \overrightarrow{DE'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}.$$

Car la rotation conserve le coefficient de colinéarité de deux vecteurs.

Or $\overrightarrow{DG} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{DA}$ *donc* $\overrightarrow{DE'} = \overrightarrow{DG}$. *D'où* $E' = G$. *Ce qui signifie que* $r(E) = G$.

♣ *On cherche* $r(F)$:

$$\text{On a } \begin{cases} OD = OC \\ \left(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi] \end{cases} \text{ donc } r(D) = C, \text{ et } F \text{ est le milieu du segment } [DC]$$

et comme la rotation conserve le milieu d'un segment alors $r(F)$ *est le milieu de* $r([DC]) = [CB]$. *Puisque* H *est le milieu du segment* $[BC]$. *Donc* $r(F) = H$.

♣ *On déduit que :* $(EF) \perp (GH)$.

Comme $r(E) = G$ *et* $r(F) = H$ *et l'angle de rotation est* $\dfrac{-\pi}{2}$. *Donc* $\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{GH}\right) \equiv \dfrac{-\pi}{2}\,[2\pi]$, *d'où*

$$(EF) \perp (GH).$$

Images de certaines figures par une rotation

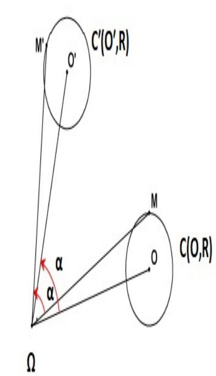
Soit r une rotation et A, B, O, A', B' et O' des points du plan tels que $A \neq B$, $r(A) = A'$, $r(B) = B'$ et $r(O) = O'$.

Propriété 17 .

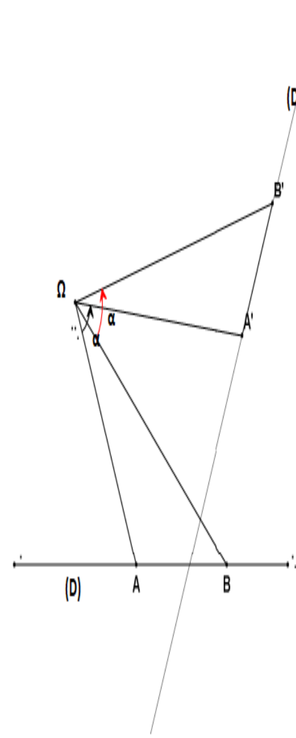
♣ *L'image de la droite* (AB) *par la rotation* r *est la droite* $(A'B')$.

♣ *L'image du segment* $[AB]$ *par la rotation* r *est le segment* $[A'B']$.

♣ *L'image du cercle* $C(O,R)$ *de centre* O *et de rayon* R, *est le cercle* $C'(O',R)$ *de centre* O' *et de rayon* R.



$r(C(O,R))=C'(O',R)$



$r((D))=(D')$

Conséquences

♣ L'image de la demi-droite $[AB)$ par la rotation r est la demi- droite $[A'B')$.

♣ Les images de deux droites perpendiculaires sont deux droites perpendiculaires.

♣ Les images de deux droites parallèles sont deux droites parallèles.

♣ Si un point M est le point d'intersection de deux droites (D) et (Δ) alors, l'image de M par la rotation r est le point d'intersection des images de (D) et (Δ) par la rotation r.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**