Limite d'une fonction numérique

Limite infinie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$.

Activité d'introduction

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2$.

1. Recopier et compléter le tableau suivant :

x	1	5	10	100	1000
$f(x)$	...	...	...	...	...

2. Que remarque-t-on pour les valeurs de $f(x)$ quant x prend des valeurs positives de plus en plus grandes ?

On constate que plus x devient grand, plus $f(x)$ prend des valeurs de plus en plus grandes. On dit que " $f(x)$ **tend vers** $+\infty$, lorsque x tend vers $+\infty$. On dit que : " la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à $+\infty$ " et on note :

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$$

Définition 1 .
Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ où $a \in \mathbb{R}$. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$, on écrit : $\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = +\infty$.

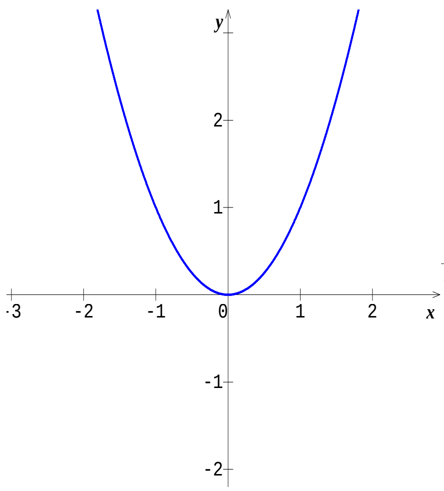
Limites usuelles

♣ $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x = +\infty$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^3 = +\infty$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x} = +\infty$.

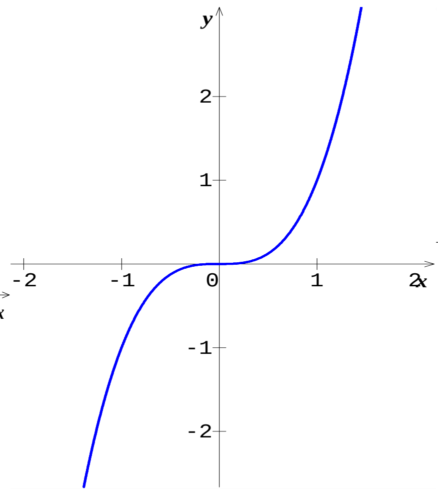
♣ $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x = -\infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^2 = +\infty$, $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^3 = -\infty$, $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$ $\lim_{x\longrightarrow+\infty} x^n = +\infty$.

♣ Si n est pair et $n \neq 0$, alors $\lim_{x\longrightarrow-\infty} x^n = +\infty$

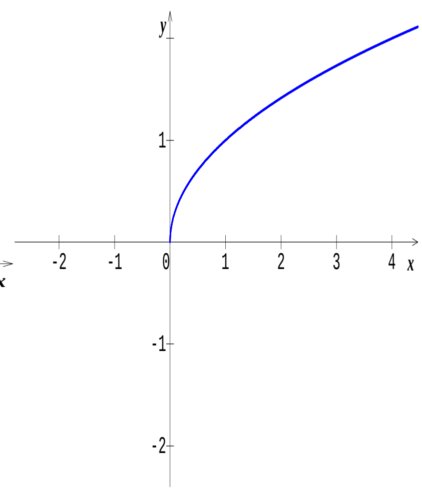
♣ Si n est impair, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^n = -\infty$.



$y{=}x^2$



$y{=}x^3$



$y{=}\sqrt{x}$

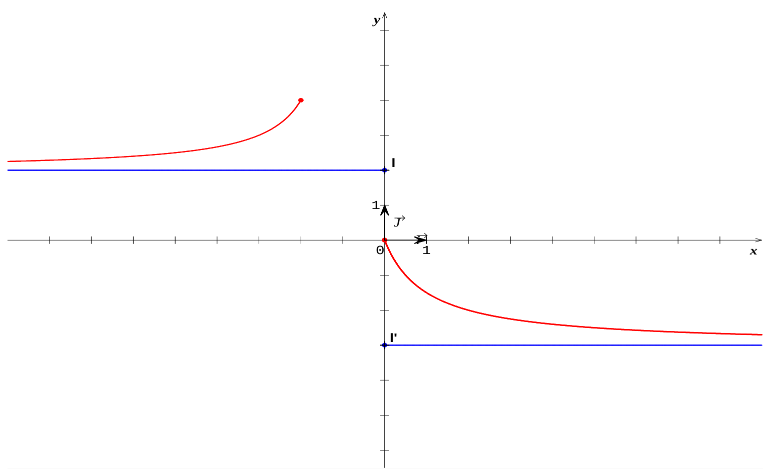
Exemple 2 .

Calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^7$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^8$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^5$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^9$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^6$.

Limite finie d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

Activité d'introduction

La figure au-dessous représente la courbe de la fonction f dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



En utilisant la courbe de la fonction f, que peut-on conclure quand x prend des valeurs de plus en plus grandes.

♣ La courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell'$ quand x tend vers $+\infty$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $+\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell'$.

♣ La courbe de f se rapproche de plus en plus de la droite d'équation $y = \ell$ quand x tend vers $-\infty$. On dit que $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers $-\infty$ et on note $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell$.

Définition 3 .

♣ *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a, +\infty[$ (où $a \in \mathbb{R}$), et soit ℓ un réel. Si $f(x)$ tend vers le nombre ℓ quand x tend vers $+\infty$, alors on note* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell$.

♣ *Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$ (où $b \in \mathbb{R}$), et soit ℓ' un réel. Si $f(x)$ tend vers le nombre ℓ' quand x tend vers $-\infty$, alors on note* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell'$.

Limites usuelles

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0, \quad (\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

Exemple 4 .

Calculer $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^8}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \frac{1}{x^7}$, $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^6}$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^5}$.

Propriété 5 .

Soit f une fonction numérique et ℓ un réel.

♣ *Si f admet une limite ℓ en $+\infty$ (ou en $-\infty$), alors cette limite est unique.*

♣ $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - \ell) = 0$

♣ $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = \ell \iff \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - \ell) = 0$

Exemple 6 .

Montrer que : $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{-2x^3 + x}{x^3} = -2$.

On pose : $f(x) = \dfrac{-2x^3 + x}{x^3}$ *où* $x \in \mathbb{R}^*$.

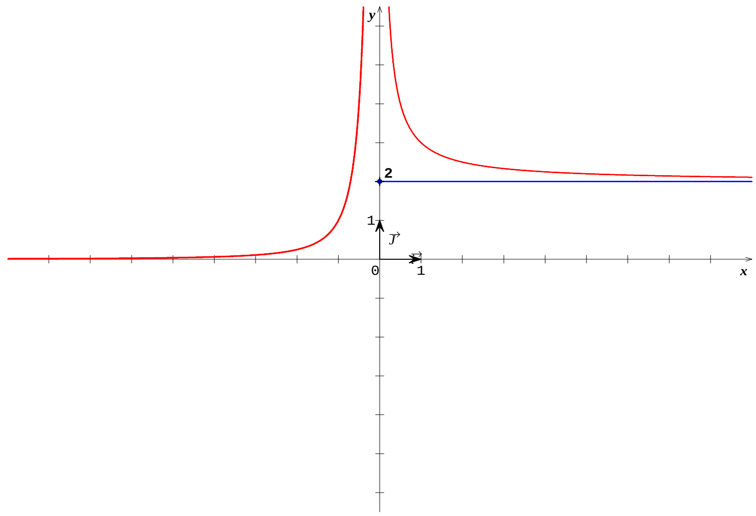
Soit $x \in \mathbb{R}^*$, *on a :* $f(x) - (-2) = \dfrac{-2x^3 + x}{x^3} + 2 = \dfrac{-2x^3 + x + 2x^3}{x^3} = \dfrac{x}{x^3} = \dfrac{1}{x^2}$. *Donc*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} (f(x) - (-2)) = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

d'où $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = -2$.

Exemple 7 .

La figure suivante représente la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.



1. *Déterminer par lecture graphique ,* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

2. *Sachant que* (C_f) *est la courbe de la fonction* $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x+1}{x}; & x > 0 \\ f(x) = \dfrac{1}{x^2} \; ; & x < 0 \end{cases}$

   Retrouver les résultats de $1^{ére}$ *question.*

♣ *Au voisinage de* $+\infty$ *(C'est-à-dire quand* x *tend vers* $+\infty$*)*

on remarque que (C_f) *se rapporche de plus en plus de la droite* (D) *d'équation* $y = 2$*, donc* $f(x)$ *se rapproche de plus en plus du nombre* 2*, d'où* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 2$.

Au voisinage de $-\infty$ *(C'est-à-dire quand* x *tend vers* $-\infty$*)*

on remarque que (C_f) *se rapporche de plus en plus de l'axe des abscisses (dont l'équation* $y = 0$*)* *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x) = 0$.

♣ *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$:

Sur l'intervalle $]0, +\infty[$, $f(x) = \dfrac{2x+1}{x} = 2 + \dfrac{1}{x}$, *donc* $f(x) - 2 = \dfrac{1}{x}$ *or* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} (f(x) - 2) = 0$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 2$$

C'est le même résultat obtenu par lecture graphique.

Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$, *or* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$, *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} f(x) = 0$$

C'est le même résultat obtenu par lecture graphique.

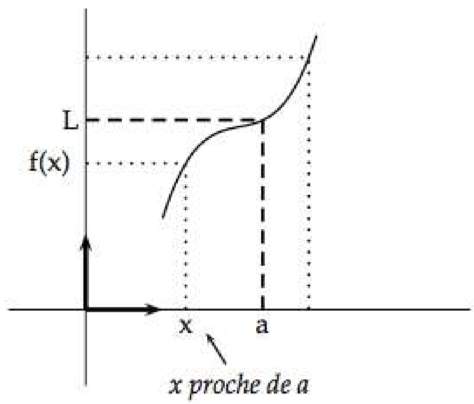
Limite finie et infinie d'une fonction en un point

Limite finie d'une fonction en un point

Définition 8 .

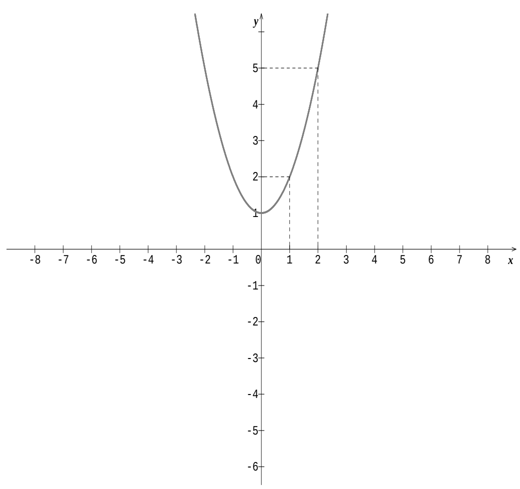
Soit a et ℓ deux nombres réels. Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[$ où $\alpha \in]0, +\infty[$, ou sur un ensemble de la forme $]a-\alpha, a+\alpha[\setminus \{a\}$. Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a, alors on note :

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell$$



Exemple 9 .

La figure suivante représente la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}$



Déterminer par lecture graphique : $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x)$ *et* $\lim_{x \longrightarrow 2} f(x)$.

♣ *Lorsque les valeurs de x se rapprochent de plus en plus de 2, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de 5. Ainsi* $\lim_{x \longrightarrow 2} f(x) = 5$.

♣ *Lorsque les valeurs de x se rapprochent de plus en plus de 1, les valeurs de $f(x)$ se rapprochent de plus en plus de 2. Ainsi* $\lim_{x \longrightarrow 1} f(x) = 2$.

Propriété 10 .

Soit f une fonction numérique, a et ℓ deux réels. Si f admet une limite ℓ en a, alors cette limite est unique.

Exemple 11 (*Limites usuelles*) .

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x = 0, \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} x^2 = 0 \quad , \qquad \lim_{x \longrightarrow 0} x^3 = 0$$

Exemple 12 .

Montrer que : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(x^3 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) = -\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. *On a :* $\left(x^3 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) - \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) = x^3$, *et comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^3 = 0$ *donc* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} \left(x^3 - \dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) - \left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2} \right) = 0$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} \left(x^3 - \frac{\sqrt{5}}{2} \right) = -\frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Limite infinie d'une fonction en un point

Définition 13 .

Soit f une fonction numérique et a un nombre réel. Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers a, alors on note : $\lim\limits_{x \longrightarrow a} f(x) = +\infty$.

Limite à droite et limite à gauche d'une fonction en un point

Définition 14 .

Soit f une fonction numérique. Soit a et ℓ deux nombres réels.

♣ *Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a à droite (c'est-à-dire $x > a$), alors on note :* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \longrightarrow a^+} f(x)$.

♣ *Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers a à droite (c'est-à-dire $x > a$),*

$$\textit{alors on note} \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty \;\; \textit{ou} \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = +\infty \left(\textit{respectivement} \quad \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x > a}} f(x) = -\infty \quad \textit{ou}\right.$$

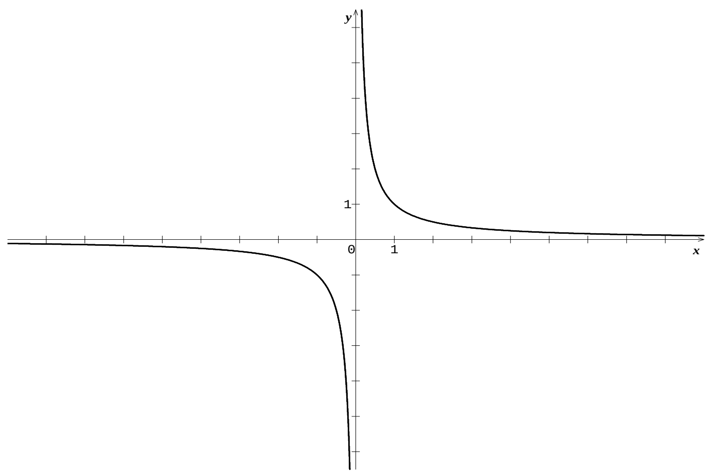
♣ *Si $f(x)$ tend vers ℓ quand x tend vers a à gauche (c'est-à-dire $x < a$), alors on note :* $\lim\limits_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = \ell$ *ou* $\lim\limits_{x \longrightarrow a^-} f(x)$.

♣ *Si $f(x)$ tend vers $+\infty$ (respectivement $-\infty$) quand x tend vers a à gauche (c'est-à-dire $x < a$),*

$$\text{alors on note } \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = +\infty \text{ ou } \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = +\infty \left(\text{respectivement } \lim_{\substack{x \longrightarrow a \\ x < a}} f(x) = -\infty \text{ ou} \right.$$

Exemple 15 .

La figure suivante représente la courbe d'une fonction définie sur $\mathbb{R}^*$.



Déterminer par lecture graphique , $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} f(x)$.

♣ *Lorsque les valeurs de x négatives deviennent proches de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent négatives et de plus en plus petites.*

Ainsi f admet pour limite $-\infty$ lorsque x tend vers 0 avec $x < 0$. Donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = -\infty.$$

♣ *Lorsque les valeurs de x positives deviennent proches de 0, les valeurs de $f(x)$ deviennent de plus en plus grandes.*

Ainsi f admet pour limite $+\infty$ lorsque x tend vers 0 avec $x > 0$. Donc

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty.$$

Limites usuelles

♣ $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

♣ Si n est un nombre pair non nul, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$.

♣ Si n est un nombre impair, alors $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$.

Exemple 16 .

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^3}, \quad \lim_{x \longrightarrow 0^+} \frac{1}{x^8} \quad et \quad \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{1}{x^{12}}$$

Théorème 17 .

Soit f une fonction numérique.

$$\lim_{x \longrightarrow a} f(x) = \ell \iff \left(\lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \ell = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) \right).$$

Opérations sur les limites

On admet sans démonstration toutes les opérations suivantes.

Dans tout ce qui suit , a est un nombre réel ou $+\infty$ ou $-\infty$, ℓ et ℓ' sont des réels.

Limite d'une somme.

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \longrightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \longrightarrow a} (f+g)(x)$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	F.I	F.I

Limite d'un produit

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	$+\infty$ ou $-\infty$
$\lim_{x \longrightarrow a} g(x)$	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$ ou $-\infty$	0
$\lim_{x \longrightarrow a} (f \times g)(x)$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

Limite de l'inverse

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$	$\ell \in \mathbb{R}^*$	$+\infty$	$-\infty$	0^+	0^-
$\lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{\ell}$	0	0	$+\infty$	$-\infty$

Limite d'un quotient

$\lim_{x \longrightarrow a} f(x)$	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$ ou $\ell < 0$
$\lim_{x \longrightarrow a} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	$\ell > 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell < 0$	0^+
$\lim_{x \longrightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

$+\infty$ ou $\ell > 0$	$+\infty$ ou $\ell > 0$	$-\infty$ ou $\ell < 0$	0	$\pm\infty$
0^+	0^-	0^-	0	$\pm\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	F.I	F.I

Exemple 18 .

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{1}{-x+3}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x^2+x}$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{3x-4}{x-1}$.

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{1}{-x+3}$:

Le tableau de signe de l'expression $-x+3$:

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$-x+3$		$+$	0	$-$	

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+} -x+3=0^-$, *d'où par inverse* $\lim\limits_{x\longrightarrow 3^+}\dfrac{1}{-x+3}=-\infty$.

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x^2+x}$:

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -\dfrac{1}{x}=-\infty$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 1-\dfrac{1}{x}=-\infty$, *d'autre part,* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^2+x=0^+$ *d'où par quotient* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{x^2+x}=-\infty$.

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{3x-4}{x-1}$:

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} 3x-4=-1$, *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+} x-1=0^+$ $(x>1 \implies x-1>0)$ *donc par quotient* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}\dfrac{3x-4}{x-1}=-\infty$.

Limite d'une fonction polynôme– Limite d'une fonction rationnelle

Propriété 19 .

♣ *Soit* P *et* Q *deux fonctions polynômes et* x_0 *un réel.*

- $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0} P(x)=P(x_0)$, $\lim\limits_{x\longrightarrow x_0}\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)}$ *si* $Q(x_0)\neq 0$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} a_nx^n$. $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_1x+a_0=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} a_nx^n$.
- $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+...+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\dfrac{a_nx^n+...+a_1x+a_0}{b_mx^m+...+b_1x+b_0}=\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\dfrac{a_nx^n}{b_mx^m}$.

Exemple 20 *Calculer les limites suivantes* :

$$\lim_{x\longrightarrow 1} 3x^2-2x-5, \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2-2x+5, \qquad \lim_{x\longrightarrow +\infty} -3x^6+8x^5+x+1,$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty} -3x^6+8x^5+x+1\ , \lim_{x\longrightarrow -\infty} -5x^3-2x^2+210, \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2-2x+5$$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 1} 3x^2-2x-5 = 3\times 1-2\times 1-5=-4.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2-2x+5 = \lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2=+\infty.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow +\infty} -3x^6+8x^5+x+1 = \lim_{x\longrightarrow +\infty} -3x^6=-\infty.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow -\infty} -3x^6+8x^5+x+1 = \lim_{x\longrightarrow -\infty} -3x^6=-\infty.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow -\infty} -5x^3-2x^2+210 = \lim_{x\longrightarrow -\infty} -5x^3=+\infty$

♣ $\lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2-2x+5 = \lim_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2=+\infty.$

Exemple 21 *.*
Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-1}{3x+2}, \qquad \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{5x^2+x+1}{x+2}, \quad \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-2x^5+x}{7x^3+x^2+x+1}$$

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{4+2x^3}{3x^3+2x^2+1}, \ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}\ \ , \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^3-x+2}{x-1}$$

♠ $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x-1}{3x+2} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{2x}{3x}=\frac{2}{3}.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{5x^2+x+1}{x+2} = \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{5x^2}{x}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}5x=-\infty.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-2x^5+x}{7x^3+x^2+x+1} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-2x^5}{7x^3}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{-2}{7}x^2=-\infty.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{4+2x^3}{3x^3+2x^2+1} = \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^3}{3x^3}=\frac{2}{3}.$

♣ $\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2} = \lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2}{x^2}=1$

♣ $\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^3-x+2}{x-1} = \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{2x^3}{x}=\lim_{x\longrightarrow -\infty}2x^2=+\infty.$

Exemple 22 .

Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(x-\sqrt{x})$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}(x^2+1)\dfrac{1}{x}$.

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}$ $(F.I)$ $\left(\textit{On ne peut rien conclure pour } \lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{x^2-1}{x^2-3x+2}\right)$

on a : $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$ *et* $x^2-1=(x-1)(x+1)$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{x+1}{x-2}=-2$$

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}x-\sqrt{x}=+\infty+(-\infty)$ $(F.I)$

on a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(x-\sqrt{x}\right) &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(\sqrt{x^2}-\sqrt{x}\right)\\ &= \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x}=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x}-1=+\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x}\left(\sqrt{x}-1\right)$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(x-\sqrt{x}\right)=+\infty$$

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}(x^2+1)\dfrac{1}{x}=(+\infty)\times 0$ $(F.I)$

on a

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}\frac{x^2}{x}+\frac{1}{x}=\lim_{x\longrightarrow +\infty}x+\frac{1}{x}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}x=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{1}{x}=0$, *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}x+\dfrac{1}{x}=-\infty$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow -\infty}\left(x^2+1\right)\frac{1}{x}=-\infty$$

Limites de fonctions irrationnelles

Propriété 23 .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle de la forme $[a,+\infty[$ (où a est un réel) tel que : $(\forall x\in[a,+\infty[)\,,\ f(x)\geq 0.$

♣ Si $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}f(x)=\ell$ *et* $\ell\geq 0$, *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\ell}$.

♣ Si $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}f(x)=+\infty$, *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{f(x)}=+\infty$.

Exemple 24 .

Calculer :

$$\lim_{x\longrightarrow 3}\sqrt{2x-1},\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{3x^2-x+2},\quad \lim_{x\longrightarrow -\infty}\sqrt{x^2+x+3}$$

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x\ ,\ \lim_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{\frac{x^2+1}{4x^2-x+1}}\ ,\lim_{x\longrightarrow 1^+}\sqrt{\frac{2x}{x-1}}.$$

♣ *on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow 3} 2x-1=5$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 3}\sqrt{2x-1}=\sqrt{5}$.

♣ *on a :* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} 3x^2-x+2=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{3x^2-x+2}=+\infty$.

♣ *on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} x^2+x+3=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$

♣ *on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} x^2+x+3=+\infty$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x^2+x+3}=+\infty$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} 2x=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{x^2+x+3}+2x=+\infty$.

♣ *on a* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{x^2+1}{4x^2-x+1}=\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\dfrac{x^2}{4x^2}=\dfrac{1}{4}$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty}\sqrt{\dfrac{x^2+1}{4x^2-x+1}}=\dfrac{1}{2}$.

Remarque 25 .
La notation $\lim\limits_{|x|\longrightarrow +\infty} f(x)=\ell$ *veut dire* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)=\ell$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=\ell$.

Limites de fonctions trigonométriques

Théorème 26 .

♣
$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x}{x}=1 \quad , \quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\frac{1}{2} \quad et \quad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

♣ *Pour tout réel non nul* a, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}=a$.

♣ *Pour tout réel* a, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sin x=\sin a$.

♣ *Pour tout réel* a, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\cos x=\cos a$.

♣ *Pour tout réel* $a\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$ *où* $k\in\mathbb{Z}$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\tan x=\tan a$.

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\sin x=0$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\cos x=1$, *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\tan x=0$.

Exemple 27 *Calculer les limites suivantes* :

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 3x}{x},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 5x}{4x},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 7x}{\sin 2x},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x+\sin x}{\tan x},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{2x^2},\ \lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x},\ \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1}$$

♠ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin 3x}{x}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\times 3=1\times 3=3.$ $\left(\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}=1\right)$.

♠ $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 5x}{4x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 5x}{5x}\times\frac{5}{4}=1\times\frac{5}{4}=\frac{5}{4}.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 7x}{2x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin 7x}{7x}\times\frac{7}{2}=1\times\frac{7}{2}=\frac{7}{2}.$

♠

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^2}\\
=\ &\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}-\sin x}{x^2}\\
=\ &\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x-\cos x.\sin x}{x^2\cos x}\\
=\ &\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin x\,(1-\cos x)}{x^2\cos x}\\
=\ &\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\frac{\sin x}{\cos x}\\
=\ &\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(1-\cos x)}{x^2}\times\tan x=\frac{1}{2}\times 0=0.
\end{aligned}$$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x+\sin x}{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\tan x}+\frac{\sin x}{\tan x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}}+\frac{\sin x.\cos x}{\sin x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{\frac{\tan x}{x}}+\cos x=2.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{2x^2}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\longrightarrow 0^+}\frac{1-\cos\sqrt{x}}{\left(\sqrt{x}\right)^2}=\frac{1}{2}.$

♠ $\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1}$

On pose $X=x-1$. Si x tend vers 1 alors X tend vers 0. On obtient

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(x-1)^2}{\cos(x-1)-1} &= \lim_{X\longrightarrow 0}\frac{X^2}{\cos X-1}\\
&= \lim_{X\longrightarrow 0}-\frac{X^2}{(1-\cos X)}\\
&= \lim_{X\longrightarrow 0}-\frac{1}{\frac{1-\cos X}{X^2}}=-2
\end{aligned}$$

♣ $\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{3x}{\sin x}=\lim_{x\longrightarrow 0}3\left(\frac{\tan 3x}{3x}\times\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}\right)$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\tan 3x}{3x}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\tan X}{X}=1$ $(\textit{avec } X=3x)$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{\tan 3x}{3x}\times\dfrac{1}{\dfrac{\sin x}{x}}=1$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan 3x}{\sin x}=3$$

Limites et ordre

Propriété 28 .

Soit a et ℓ deux réels et $I=[a,+\infty[$.

Soit f, u et v des fonctions numériques définies sur I.

1. Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,,\ f(x)\geq u(x)\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}u(x)=+\infty\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=+\infty.$

2. Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,,\ f(x)\leq u(x)\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}u(x)=-\infty\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=-\infty.$

3. Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,,\ |f(x)-\ell|\leq u(x)\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}u(x)=0\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\ell.$

4. Si $\begin{cases}(\forall x\in I)\,,u(x)\leq f(x)\leq v(x)\\ \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}u(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}=\ell\end{cases}$ *alors* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f(x)=\ell.$

Remarque 29 .

Ces propriétés restent valables si on calcule la limite en $-\infty$ ou en a ou à droite en a ou à gauche en a.

Exemple 30 .

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2-\cos x}\leq 1$, *puis déduire les limites suivantes :*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x}{2-\cos x}\ ,\quad \lim_{x\longrightarrow-\infty}\frac{x^3}{2-\cos x}\quad \textit{et}\quad \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{x+\cos x}{2-\cos x}$$

♣ *Montrons que :* $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2-\cos x}\leq 1.$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$-1\leq\cos x\leq 1 \iff -1\leq-\cos x\leq 1 \iff 1\leq 2-\cos x\leq 3 \iff \dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2-\cos x}\leq 1$

donc $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \dfrac{1}{3}\leq\dfrac{1}{2-\cos x}\leq 1.$

♣ *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{2-\cos x}$:

On a : $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\cos x} \leq 1$ *et comme* $x \longrightarrow +\infty$ *alors* $x > 0$, *donc* $\dfrac{x}{3} \leq \dfrac{x}{2-\cos x} \leq x$ *et puisque* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x}{3} = +\infty$ *donc d'après la propriété* 1 *on déduit que*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x}{2-\cos x} = +\infty$$

♣ *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3}{2-\cos x}$:

On a : $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\cos x} \leq 1$ *et comme* $x \longrightarrow -\infty$ *alors* $x < 0$, *donc* $x^3 < 0$.

d'où: $x^3 \leq \dfrac{x^3}{2-\cos x} \leq \dfrac{x^3}{3}$ *et puisque* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{x^3}{3} = -\infty$ *donc d'après la propriété* 2 *on déduit que*

$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x^3}{2-\cos x} = -\infty$$

♣ *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x+\cos x}{2-\cos x}$:

On a $-1 \leq \cos x \leq 1$, *alors* $-1+x \leq 1+\cos x \leq 1+x$ *et comme* $x \longrightarrow +\infty$ *on peut supposer que* $x > 1$ *donc*

$$0 < -1+x \leq 1+\cos x \leq 1+x$$

or $\dfrac{1}{3} \leq \dfrac{1}{2-\cos x} \leq 1$ *donc par produit membre à membre on obtient*

$$\frac{-1+x}{3} \leq \frac{x+\cos x}{2-\cos x} \leq 1+x$$

comme $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{-1+x}{3} = +\infty$, *donc*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x+\cos x}{2-\cos x} = +\infty$$

Exemple 31 *.*

Calculer : $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On a : $-1 \leq \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq 1$, *donc* : $-x^2 \leq x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \leq x^2$. *Comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} -x^2 = 0$ *donc d'après la propriété* 4, *on déduit que*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com