Calcul trigonométrique

Transformation de $\cos(a-b)$

Transformation de $\cos(a-b)$ et ses conséquences

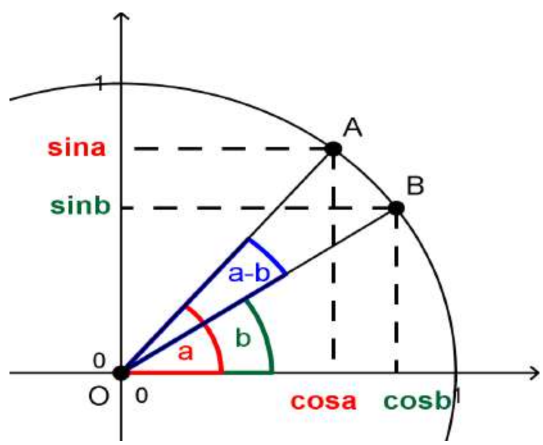
Théorème 1 .

Soit a et b deux réels, on a

$$\begin{aligned}
\cos(a-b) &= \cos a.\cos b+\sin a.\sin b\\
\cos(a+b) &= \cos a.\cos b-\sin a.\sin b\\
\sin(a+b) &= \sin a.\cos b+\cos a.\sin b\\
\sin(a-b) &= \sin a.\cos b-\cos a.\sin b
\end{aligned}$$

Démonstration 2 .

Soit les points A et B sur le cercle unité :



■ *Montrons* $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$:

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}$ *par deux façons différentes :*

on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} &= \left\|\overrightarrow{OA}\right\|.\left\|\overrightarrow{OB}\right\|.\cos(a-b)\\
&= \cos(a-b). \qquad (1)
\end{aligned}$$

D'autre part, on a $\overrightarrow{OA}(\cos a,\sin a)$ *et* $\overrightarrow{OB}(\cos b,\sin b)$, *donc*

$$\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b \qquad (2).$$

D'après (1) *et* (2), *on en déduit que :*

$$\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$$

■ *Montrons* $\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b$:

On remplace dans la formule ci-dessus b *par* $-b$, *on obtient alors* :

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos(-b) + \sin a.\sin(-b)$$

comme $\cos(-b) = \cos b$ *et* $\sin(-b) = -\sin b$, *d'où*

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b.$$

■ *Montrons que* $\sin(a+b) = \sin a.\cos b + \cos a.\sin b$:

On sait que : $\sin\theta = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ *pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$. *Donc*

$$\begin{aligned}
\sin(a+b) &= \cos\left(\frac{\pi}{2} - (a+b)\right) \\
&= \cos\left(\left(\frac{\pi}{2} - a\right) - b\right) \\
&= \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\cos b + \sin\left(\frac{\pi}{2} - a\right).\sin b \\
&= \sin a.\cos b + \cos a.\sin b
\end{aligned}$$

■ *Montrons que* $\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b$:

On remplace dans la formule ci-dessus b *par* $-b$, *on obtient alors* :

$$\begin{aligned}
\sin(a-b) &= \sin a.\cos(-b) + \cos(a).\sin(-b) \\
&= \sin a.\cos b - \cos a.\sin b
\end{aligned}$$

Exemple 3 .

Calculons $\cos\frac{5\pi}{12}$ *et* $\sin\frac{\pi}{12}$.

■ *Remarquant que* : $\frac{5\pi}{12} = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\
&= \cos\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{6} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}.
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) \\
&= \sin\frac{\pi}{3}.\cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{3}.\sin\frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2}.\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

Conséquences : Transformation de $\cos(2a)$ et $\sin(2a)$ et formules de linéarisation

Formules de duplication

Soit a un nombre réel :

Théorème 4

■
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

■
$$\sin 2a = 2\sin a . \cos a$$

Démonstration 5 .
Soit $a \in \mathbb{R}$, *on a*

■
$$\begin{aligned} \cos 2a &= \cos(a+a) \\ &= \cos^2 a - \sin^2 a \end{aligned}$$

comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, *alors on obtient les deux formules suivantes* :

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 1 - \sin^2 a - \sin^2 x \\ &= 1 - 2\sin^2 x \\ &= 1 - 2\left(1 - \cos^2 x\right) \\ &= 1 - 2 + 2\cos^2 x \\ &= 2\cos^2 x - 1 \end{aligned}$$

■
$$\begin{aligned} \sin 2a &= \sin(a+a) \\ &= \sin a . \cos a + \cos a . \sin a \\ &= 2\sin a \cos a \end{aligned}$$

Exemple 6 .

■ *Calculer* $\cos 2x$ *avec* $\cos x = \frac{-1}{3}$.

On a

$$\begin{aligned} \cos 2x &= 2\cos^2 x - 1 \\ &= 2 \times \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 1 \\ &= \frac{2}{9} - 1 \\ &= \frac{-7}{9} \end{aligned}$$

donc $\cos 2x = \dfrac{-7}{9}$.

■ *Calculer* $\sin 2x$ *avec* $\sin x = \dfrac{3}{5}$ *et* $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

On sait que :

$$\sin 2x = 2\cos x . \sin x.$$

On cherche $\cos x$:

On a

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= 1 - \sin^2 x \\ &= 1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2 \\ &= \frac{16}{25} \end{aligned}$$

donc

$$|\cos x| = \frac{4}{5}$$

comme $x \in \left[\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *alors* $\cos x \geq 0$, *c'est-à-dire* $|\cos x| = \cos x$ *d'où*

$$\cos x = \frac{4}{5}.$$

par suite

$$\sin 2x = 2 \times \frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{24}{25}.$$

Exemple 7 .

Soit a *un réel de* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ *tel que* $\cos a = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$.
Calculer $\cos 2a$.

■ *Soit* $a \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, *on a*

$$\begin{aligned} \cos 2a &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 2 \times \left(\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\right)^2 - 1 \\ &= 2 \times \frac{(2+\sqrt{3})}{4} - 1 \\ &= \frac{2\left(2+\sqrt{3}\right) - 4}{4} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

Formules de linéarisation

Soit $a \in \mathbb{R}$.

$$\cos^2 a = \frac{1+\cos(2a)}{2} \qquad et \qquad \sin^2 a = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

Démonstration 8 *Ces formules se déduisent directement des formules de duplication avec le* $\cos 2a$.

Exemple 9 .

Calculons $\sin\frac{\pi}{8}$ *et* $\cos\frac{\pi}{8}$.

On a : $\frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8}$, *donc*

$$\begin{aligned}
\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \\
&= \frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{2-\sqrt{2}}{4}
\end{aligned}$$

comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ *alors* $0 < \sin\frac{\pi}{8}$. *D'où*

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

De même on a

$$\begin{aligned}
\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} \\
&= \frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}+2}{4}
\end{aligned}$$

comme $0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$ *alors* $0 < \cos\frac{\pi}{8}$. *D'où*

$$\cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}.$$

Transformation de produits en sommes et de sommes en produits

Transformation de produit en somme

Soit $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\cos a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\cos(a+b)+\cos(a-b)\right]\\
\sin a.\sin b &= -\frac{1}{2}\left[\cos(a+b)-\cos(a-b)\right]\\
\sin a.\cos b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)+\sin(a-b)\right]\\
\cos a.\sin b &= \frac{1}{2}\left[\sin(a+b)-\sin(a-b)\right]
\end{aligned}$$

Exemple 10 *.*

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos(2x)}{2}-\frac{1}{4}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos\left(x+\frac{\pi}{3}+x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}-x+\frac{\pi}{3}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\left[\cos(2x)+\cos\frac{2\pi}{3}\right]\\
&= \frac{\cos(2x)}{2}-\frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,,\quad \cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\cos(2x)}{2}-\frac{1}{4}.$$

Exemple 11 *.*

Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2 x-\frac{1}{2}$.
Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right) &= \frac{1}{2}\left[\cos 2x+\cos\frac{\pi}{2}\right]\\
&= \frac{1}{2}\left(2\cos^2 x-1\right)\\
&= \cos^2 x-\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x\in\mathbb{R})\,,\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right).\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\cos^2 x-\frac{1}{2}.$$

Transformation de somme en produit

Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned}
\cos p + \cos q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\cos p - \cos q &= -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin p + \sin q &= 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right).\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\\
\sin p - \sin q &= 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right).\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)
\end{aligned}$$

Exemple 12 *Soit* $x \in \mathbb{R}$.
Montrer que :

$$\begin{aligned}
\sin 5x - \sin 3x &= 2\cos 4x.\sin x\\
\cos 7x - \cos 2x &= -2\sin\frac{9x}{2}.\sin\frac{5x}{2}.
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\sin 5x - \sin 3x &= 2\cos\left(\frac{5x+3x}{2}\right).\sin\left(\frac{5x-3x}{2}\right)\\
&= 2\cos 4x.\sin x
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
\cos 7x - \cos 2x &= -2\sin\left(\frac{7x+2x}{2}\right).\sin\left(\frac{7x-2x}{2}\right)\\
&= -2\sin\frac{9x}{2}.\sin\frac{5x}{2}.
\end{aligned}$$

Transformation de $\tan(a+b)$

Transformation de $\tan(a+b)$ et $\tan(a-b)$

Soit a et b de $\mathbb{R}$ tels que : $a \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

■ Si $a+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $\tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a.\tan b}$.

■ Si $a-b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ alors $\tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 + \tan a.\tan b}$.

Exemple 13 .

■

$$\begin{aligned}
\tan\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}\right)\\
&= \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}{1-\tan\left(\frac{\pi}{4}\right).\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)}\\
&= \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{3}}{1-1.\frac{\sqrt{3}}{3}}\\
&= \frac{3+\sqrt{3}}{3-\sqrt{3}}\\
&= 2+\sqrt{3}
\end{aligned}$$

Résultats :

■ Si $a \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ et $a \neq \frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ pour tout k de $\mathbb{Z}$, alors $\tan(2a) = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$.

■ On pose $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$ pour x de $\mathbb{R}$ tel que : $x \neq \pi + 2k\pi$ et $x \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$ pour tout k de $\mathbb{Z}$. On a

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \quad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \quad et \quad \tan x = \frac{2t}{1-t^2}$$

Exemple 14 .

Calculer $\tan\frac{\pi}{8}$.

On a $\tan\frac{\pi}{4} = \tan\frac{2\pi}{8} = \dfrac{2\tan\frac{\pi}{8}}{1-\tan^2\frac{\pi}{8}} = 1,$ *donc* $2\tan\frac{\pi}{8} = 1-\tan^2\frac{\pi}{8}$

posons : $X = \tan\frac{\pi}{8}$, *donc on obtient l'équation suivante*

$$X^2+2X-1=0 \qquad / \, \Delta = 8$$

donc $X_1 = -1+\sqrt{2}$ *et* $X_2 = -1-\sqrt{2}$, *puisque* $\tan\frac{\pi}{8} > 0$ *car* $\left(0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2}\right)$, *alors*

$$\tan\frac{\pi}{8} = \sqrt{2}-1.$$

Exemple 15 .

Soit a un réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{6}\right[$.

Montrer que : $\tan(3a) = \dfrac{\tan^3(a)-3\tan a}{3\tan^2 a - 1}$.

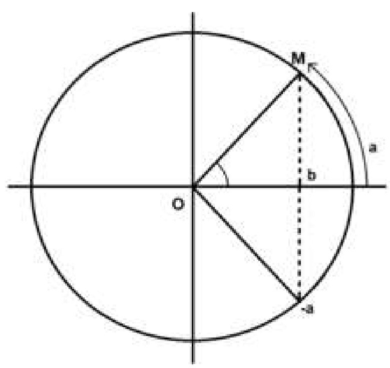
On a

$$\begin{aligned}
\tan(3a) &= \tan(2a+a) \\
&= \frac{\tan(2a)+\tan a}{1-\tan(2a).\tan a} \\
&= \frac{\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}+\tan a}{1-\dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a}.\tan a} \\
&= \frac{2\tan a+\tan a\left(1-\tan^2 a\right)}{1-\tan^2 a-2\tan^2 a} \\
&= \frac{3\tan a-\tan^3 a}{1-3\tan^2 a} \\
&= \frac{\tan^3(a)-3\tan a}{3\tan^2 a-1}
\end{aligned}$$

Équation trigonométrique de base (rappel)

♣

$$\cos x=\cos a \iff \left\{\begin{array}{c} x=a+2k\pi \\ ou \\ x=-a+2k\pi \end{array}\right. \quad /k\in\mathbb{Z}$$



Exemple 16 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E):\cos x=\dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}=\cos\dfrac{5\pi}{6}$, *alors*

$$\cos x=\cos\frac{5\pi}{6} \iff \left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \\ ou \\ x=-\dfrac{5\pi}{6}+2k\pi \end{array}\right. \quad /k\in\mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{R}$ est :

$$S = \left\{-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 17 *.*

Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ l'équation : $(E) : \cos x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[$, on a $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\dfrac{\pi}{4}$ alors

$$\cos x = \cos\frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = -\dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [-\pi, \pi[$, alors

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$, donc $x = \dfrac{\pi}{4}$.
de même on a

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \quad \Longleftrightarrow \quad -1 \leq -\frac{1}{4} + 2k < 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-3}{8} \leq k < \frac{5}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, alors $k = 0$, donc $x = -\dfrac{\pi}{4}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $[-\pi, \pi[$ est :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right\}$$

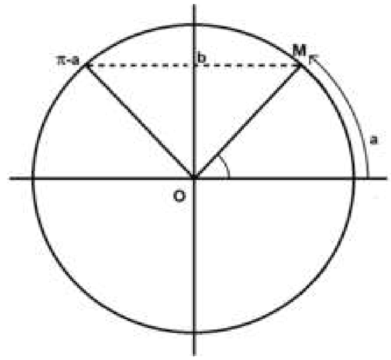
Remarque 18 *.*

Il y a quelques cas particuliers où la forme générale des solutions peut se résuler en une seule famille :

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = 2k\pi\ /k \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \pi + 2k\pi\ /k \in \mathbb{Z} \\ \cos x &= 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{2} + k\pi\ /\ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

♣

$$\sin x = \sin a \iff \left\{\begin{array}{c} x = a + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - a + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$



Exemple 19 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{1}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{1}{2} = \sin\dfrac{\pi}{6}$ *alors*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{6} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 20 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a* $\dfrac{-\sqrt{3}}{2} = -\sin\dfrac{\pi}{3} = \sin\left(\dfrac{-\pi}{3}\right)$ *alors*

$$\sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{3}\right) \iff \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{4\pi}{3} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est* :

$$S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{4\pi}{3} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 21 .

Résoudre dans $[-\pi, \pi[$ *l'équation* : $(E) : \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Soit $x \in [-\pi, \pi[$ *, on a* $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4}$ *alors*

$$\sin x = \sin\frac{\pi}{4} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array}\right. /k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [-\pi, \pi[$*, alors*
Donc

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi < \pi \iff -1 \leq \frac{1}{4} + 2k < 1 \iff \frac{-5}{8} \leq k < \frac{3}{8}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 0$ *donc* $x = \dfrac{\pi}{4}$.
De même on a : $k = 0$*, donc :* $x = \dfrac{3\pi}{4}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $[-\pi, \pi[$ *est :*

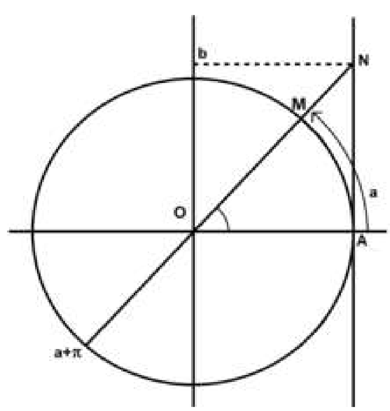
$$S = \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right\}$$

Remarque 22 *.*
Il y a quelques cas particuliers où la forme générale des solutions peut se résuler en une seule famille :

$$\begin{aligned} \sin x &= 0 \iff x = k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= 1 \iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\ \sin x &= -1 \iff x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

♣

$$\tan x = \tan a \iff x = a + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$



Remarque 23 .

Le nombre $\tan x$ *n'est défini que pour* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$.

Exemple 24 *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : \tan x = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a* $1 = \tan \frac{\pi}{4}$, *alors*

$$\tan x = \tan \frac{\pi}{4} \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{4} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exemple 25 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : \tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a* $\frac{-\sqrt{3}}{3} = -\tan \frac{\pi}{6} = \tan \left(\frac{-\pi}{6}\right)$, *alors*

$$\tan x = \tan \left(\frac{-\pi}{6}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{-\frac{\pi}{6} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Transformation de l'expression $a \cos x + b \sin x$

Soit a et b de $\mathbb{R}$ tels que : $(a, b) \neq (0, 0)$.

On a

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x\right)$$

et on a : $\left|\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$ et $\left|\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right| \leq 1$. (car $a^2 \leq a^2 + b^2$ et $b^2 \leq a^2 + b^2$)

Puisque : $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$, alors, il existe α (respectivement β) de $\mathbb{R}$ tel que :

$\cos \alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin \alpha = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ $\left(\text{respectivement } \cos \beta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \textit{ et } \sin \beta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)$.D'où

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos x \cos \alpha + \sin x \sin \alpha\right) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos (x - \alpha)$$

ou

$$a \cos x + b \sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\cos x \sin \beta + \sin x \cos \beta\right) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin (x + \beta)$$

Exemple 26 .

♣

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x+\sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x\right)\\ &= 2\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{6}+\sin x.\sin\frac{\pi}{6}\right)\\ &= 2\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right).\end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x+\sin x &= 2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\\ &= 2\left(\sin\frac{\pi}{6}\cos x+\cos\frac{\pi}{6}\sin x\right)\\ &= 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

Remarque 27 .

On peut transformer $a\cos x+b\sin x$ *pour résoudre des équations de type* $a\cos x+b\sin x=c$ *ou d'inéquation de type* $a\cos x+b\sin x\geq c$ *ou* $a\cos x+b\sin x\leq c$.

Exemple 28 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation* (E) : $\cos x+\sqrt{3}\sin x=1$.

1. ■ *Transformons* : $\cos x+\sqrt{3}\sin x$

   On a

$$\begin{aligned}\cos x+\sqrt{3}\sin x &= 2\left(\frac{1}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right)\\ &= 2\left(\cos x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin x.\sin\frac{\pi}{3}\right)\\ &= 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\end{aligned}$$

   ■ *Résolvons l'équation* (E) :

   Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}(E) &\iff 2\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=1\\ &\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}\\ &\iff \cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\\ &\iff x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\quad ou\quad x-\frac{\pi}{3}=-\frac{\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\\ &\iff x=\frac{2\pi}{3}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\ ou\ \ x=2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions dans $\mathbb{R}$ *de l'équation* (E) *est :*

$$S = \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \{2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\}$$

Exemple 29 .

Résoudre dans l'intervalle $[0, \pi]$ *l'inéquation :* $(E) : \cos(2x) - \sin(2x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

■ *Transformons :* $\cos(2x) - \sin(2x)$

$$\begin{aligned} \cos(2x) - \sin(2x) &= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(2x) - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(2x)\right) \\ &= \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}.\cos(2x) - \sin\frac{\pi}{4}.\sin(2x)\right) \\ &= \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

■ *Résolvons dans* $[0, \pi]$ *l'équation :* (E)

Soit $x \in [0, \pi]$ *, On a*

$$\begin{aligned} (E) \quad &\iff \quad \sqrt{2}\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ &\iff \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \\ &\iff \quad \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{3} \\ &\iff \quad 2x + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \quad ou \quad 2x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \quad x = \frac{\pi}{24} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \ ou \ \ x = \frac{-7\pi}{24} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

comme $x \in [0, \pi]$ *alors*

1. •

$$0 \leq \frac{\pi}{24} + k\pi \leq \pi \iff 0 \leq \frac{1}{24} + k \leq 1 \iff \frac{-1}{24} \leq k \leq \frac{23}{24}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 0$ *d'où* $x = \dfrac{\pi}{24}$.

•

$$0 \leq \frac{-7\pi}{24} + k\pi \leq \pi \iff 0 \leq \frac{-7}{24} + k \leq 1 \iff \frac{7}{24} \leq k \leq \frac{31}{24}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$*, alors* $k = 1$ *d'où* $x = \dfrac{17\pi}{24}$.

par suite l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{ \frac{\pi}{24}, \frac{17\pi}{24} \right\}.$$

Exemple 30 .

Résoudre dans $\mathbb{R}$ *l'équation suivante :* $(E) : \cos x + \sqrt{3}\sin x = 3$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}(E) \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\left(\frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x\right) = 3 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}\cos x + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x = \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \cos\frac{\pi}{3}\cos x + \sin\frac{\pi}{3}\sin x = \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow \quad \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}\end{aligned}$$

et comme $\frac{3}{2} \notin [-1, 1]$, *donc l'équation* (E) *n'admet pas de solutions dans* $\mathbb{R}$.

$$S = \phi$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com