Produit scalaire dans le plan

Expression analytique du produit scalaire dans un repère orthonormé

Soit $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ une base du plan, et O un point du plan.

♣ On dit que $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée si : $\overrightarrow{i}.\overrightarrow{j} = 0$, $\left\|\overrightarrow{i}\right\| = \left\|\overrightarrow{j}\right\| = 1$.

♣ On dit que $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est un repère orthonormé si : $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée.

♣ Si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est une base orthonormée et $\left(\overline{\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ alors $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est appelé repère orthonormé direct.

Dans toute la suite du chapitre. On considère que le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Propriétés

Propriété 1 .
Soit $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ *deux vecteurs du plan, on a* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = x.x' + y.y'$.

Démonstration 2 *Admis*

Exemple 3 *Calculons* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w}$ *et* $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w}$ *où* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{i} + 2\overrightarrow{j}$, $\overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{i} - \overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{w} = 5\overrightarrow{i} + 3\overrightarrow{j}$.
On a : $\overrightarrow{u}(1, 2)$; $\overrightarrow{v}(2, -1)$ *et* $\overrightarrow{w}(5, 3)$, *donc*

■ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 1 \times 2 + 2 \times (-1) = 0$.

■ $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{w} = 1 \times 5 + 2 \times 3 = 11$.

■ $\overrightarrow{v}.\overrightarrow{w} = 2 \times 5 + (-1) \times 3 = 7$.

Propriété 4 .
Deux vecteurs $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $xx' + yy' = 0$.

Démonstration 5 .
Si un des deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ *ou* $\overrightarrow{v}$ *est nul, le résultat est immédiat. Supposons que* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas nuls.*

$\Longrightarrow$) Si $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux alors* $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ *et* $\cos\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0$ *et* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0.$

($\Longleftarrow$ *Réciproquement, si* $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$ *alors* $\|\overrightarrow{u}\|\,\|\overrightarrow{v}\|\cos\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0$. *Mais comme* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *ne sont pas nuls, on a nécessairement* $\cos\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) = 0$, *c'est-à-dire* $\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ *et* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont bien orthogonaux.*

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0$$

Exemple 6 .

On considère dans le plan, les points suivants : $A(3,2)$; $B\left(\frac{-1}{2}, 0\right)$ *et* $E(1,-1)$.

Montrer que le triangle ABE *est rectangle en* E.

■ *On montre que* $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{BE}$ *sont orthogonaux, c'est-à-dire :* $\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} = 0$.

On a $\overrightarrow{AE}(-2,-3)$ *et* $\overrightarrow{BE}\left(\frac{3}{2}, -1\right)$. *D'où :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AE}.\overrightarrow{BE} &= (-2)\times\frac{3}{2} + (-3)\times(-1)\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{BE}$ *sont orthogonaux. Ceci signifie que le triangle* ABE *est rectangle en* E.

Exemple 7 .

Déterminer la valeur du nombre réel m *pour que les vecteurs* $\overrightarrow{u}(3, -1+m)$ *et* $\overrightarrow{v}(2-m, 5)$ *soient orthogonaux.*

■ *On a*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} &= 3\times(2-m) + (-1+m)\times 5\\ &= 6 - 3m - 5 + 5m\\ &= 2m+1.\end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{u} \perp \overrightarrow{v} \iff \overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 0 \iff 2m+1 = 0 \iff m = \frac{-1}{2}.$$

D'où $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont orthogonaux si et seulement si* $m = \frac{-1}{2}$.

Norme d'un vecteur – distance entre deux points

Norme d'un vecteur

Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ est un vecteur du plan, alors la norme du vecteur $\overrightarrow{u}$ est : $\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{x^2+y^2}$.

Distance entre deux points

Soit $A\left(x_A, y_A\right)$ et $B\left(x_B, y_B\right)$ deux points du plan. La distance AB est : $AB = \sqrt{\left(x_B - x_A\right)^2 + \left(y_B - y_A\right)^2}$.

Expression de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Propriété 8 .

Si $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{i} + y\overrightarrow{j}$ *et* $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{i} + y'\overrightarrow{j}$ *deux vecteurs non nuls du plan et* θ *une mesure de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}}\right)$.

On a

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{xx' + yy'}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}} \quad et \quad \sin\theta = \frac{\det\left(\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}\right)}{\|\overrightarrow{u}\|.\|\overrightarrow{v}\|} = \frac{xy' - x'y}{\sqrt{x^2+y^2}.\sqrt{x'^2+y'^2}}$$

Démonstration 9 *Admis*

Exemple 10 .

Déterminer la mesure principale de l'angle orienté $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right)$ *où* $A(3,3)$, $B(1,1)$ *et* $C(1,3)$

- *On a* $\overrightarrow{AB} = (-2,-2)$ *et* $\overrightarrow{AC}(-2,0)$ *donc :* $AB = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$ *et* $AC = \sqrt{4+0} = 2$, *et* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 4$. *Donc*

$$\cos\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{4}{4\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (1)$$

- *On a* $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = -4$. *Donc*

$$\sin\left(\overline{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|.\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{-4}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (2)$$

D'après (1) *et* (2), *on en déduit que* $\left(\overline{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}\,[2\pi]$. *D'où* $\frac{-\pi}{4}$ *est la mesure principale de l'angle orienté* $\left(\widehat{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}\right)$.

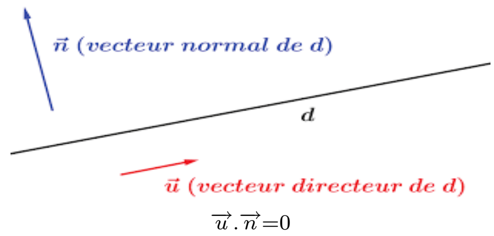
Droite dans le plan (Étude analytique) vecteur normal à une droite

Vecteur normal à une droite

Définition 11 .

Soit (D) *une droite du plan.*

Tout vecteur non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite (D) est appelé ***vecteur normal*** *à la droite (D).*



Propriété 12 .

Soit (D) une droite d'équation : $ax+by+c=0$. Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a,b)$ est un vecteur normal à la droite (D).

Démonstration 13 .

Si $ax+by+c=0$ *est une équation cartésienne de (D) alors $\overrightarrow{u}\,(-b,a)$ est un vecteur directeur de (D). Le vecteur $\overrightarrow{n}\,(a,b)$ vérifie :*

$$-b\times a+a\times b=0$$

Donc les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{n}$ sont orthogonaux.

Exemple 14 .

Déterminons un vecteur directeur et un vecteur normal à la droite $(D) : 3x-y+2=0$.
Un vecteur directeur est : $\overrightarrow{u}\,(1,3)$.
Un vecteur normal est : $\overrightarrow{n}\,(3,-1)$.

Équation cartésienne d'une droite définie par un point et un vecteur normal

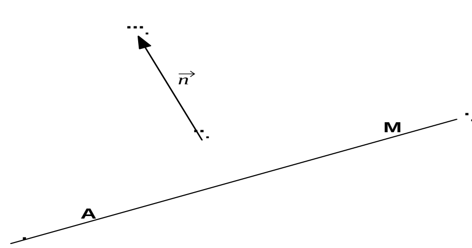
Propriété 15 .

Une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A\,(x_0,y_0)$ dont $\overrightarrow{n}\,(a,b)$ est un vecteur normal à cette droite est :

$$a\,(x-x_0)+b\,(y-y_0)=0$$

Démonstration 16 .

Soit (D) une droite dont $\overrightarrow{n}\,(a,b)$ est un vecteur normal et soit $A\,(x_0,y_0)\in(D)$.
Soit $M\,(x,y)$ un point du plan, on a $\overrightarrow{AM}\,(x-x_0,y-y_0)$.



On a

$$\begin{aligned} M(x,y)\ \epsilon\ (d) &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \\ &\iff a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \end{aligned}$$

Exemple 17 .
Une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(-1,2)$ dont $\overrightarrow{n}(4,3)$ est un vecteur normal à cette droite est :

$$4(x+1)+3(y-2)=0$$

c'est-à-dire : $(D) : 4x+3y-2=0$.

Exemple 18 .
Déterminons une équation cartésienne de la droite (D) passant par le point $A(1,1)$ et de vecteur normal $\overrightarrow{n}(2,3)$.
Soit $M(x,y)$ un point du plan, on a

$$\begin{aligned} M(x,y)\ \epsilon\ (D) &\iff \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}=0 \\ &\iff (x-1)\times 2+(y-1)\times 3 \\ &\iff 2x+3y-5=0 \end{aligned}$$

Donc, une équation cartésienne de (D) est : $2x+3y-5=0$.

Orthogonalité de deux droites

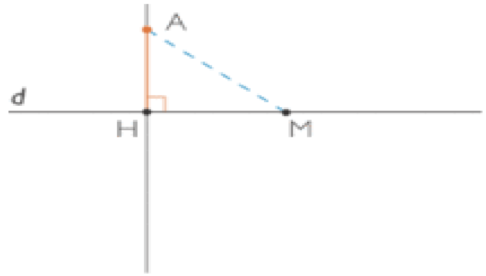
Propriété 19 .
Soit (D) et (D') deux droites d'équations respectives : $ax+by+c=0$ *et* $a'x+b'y+c'=0$. *(D) et (D') sont orthogonales si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire :* $aa'+bb'=0$.

Exemple 20 .
Soient deux droites : $(D) : x+2y+1=0$ *et* $(\Delta) : 2x-y+3=0$. *Montrons que :* $(D)\perp(\Delta)$.
On a $\overrightarrow{n_1}(1,2)$ est un vecteur normal à (D) et $\overrightarrow{n_2}(2,-1)$ est un vecteur normal à (Δ). Comme $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}=1\times 2+2\times(-1)=0$. Donc $\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ d'où

$$(D)\perp(\Delta)$$

Distance d'un point à une droite

Soit (D) une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur (D).
Si M est un point quelconque de (D), $AM^2=AH^2+HM^2$, donc $AM^2\geq AH^2$ c'est-à-dire $AM\geq AH$. Ainsi la distance AH est le minimum des distances de A aux points de (D).



On obtient la définition suivante.

Définition 21 *Soit (D) une droite du plan. Soit A un point du plan, H son projeté orthogonal sur (D). Le nombre réel positif AH est appelé la distance du point A à la droite (D) ; on le notera $d(A;(D))$.*

Propriété 22 .

Soit (D) une droite d'équation : $ax+by+c=0$ et $A\left(x_A,y_A\right)$ un point du plan.

La distance du point A à la droite (D) est :

$$d\left(A,(D)\right)=\frac{|ax_A+by_A+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Démonstration 23 .

Soit (D) une droite d'équation : $ax+by+c=0$. On a $\overrightarrow{n}\,(a,b)$ est un vecteur normal à (D). D'autre part, H appartient à (D), alors

$$ax_H+by_H+c=0.$$

D'où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n} &= \left(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}\right).\overrightarrow{n} \\
&= \overrightarrow{AO}.\overrightarrow{n}+\overrightarrow{OH}.\overrightarrow{n} \\
&= -ax_A-by_A+ax_H+by_H \\
&= (-ax_A-by_A-c)+\left(\underbrace{ax_H+by_H+c}_{=0}\right) \\
&= -ax_A-by_A-c
\end{aligned}$$

Donc

$$\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}\right|=|-ax_A-by_A-c|=|ax_A+by_A+c|$$

comme : $\left|\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{n}\right|=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|.\|\overrightarrow{n}\|.\left|\cos\left(\overline{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}}\right)\right|$, *donc*

$$\left\|\overrightarrow{AH}\right\|.\|\overrightarrow{n}\|.\left|\underbrace{\cos\left(\overline{\overrightarrow{AH},\overrightarrow{n}}\right)}_{=1}\right|=|ax_A+by_A+c|$$

par suite

$$\left\|\overrightarrow{AH}\right\|.\|\overrightarrow{n}\| = |ax_A + by_A + c|$$

puisque $\|\overrightarrow{n}\| = \sqrt{a^2+b^2}$ *donc*

$$AH = d\left(A,(D)\right) = \frac{|ax_A + by_A + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Exemple 24 .

On considère la droite (D) *d'équation* : $x+y+2=0$ *et les points* $A(1,-1)$ *et* $B(0,-2)$.
On a

$$d\left(A,(D)\right) = \frac{|1-1+2|}{\sqrt{1+1}} = \sqrt{2} \quad et \quad d\left(B,(D)\right) = \frac{|0-2+2|}{\sqrt{1+1}} = 0$$

Remarque 25 .

$d\left(B,(D)\right) = 0$ *signifie que* $B \in (\Delta)$.

Équation cartésienne d'un cercle

Équation d'un cercle défini par son centre et son rayon

Définition 26 .

Ω *est un point du plan et* R *est un réel positif.*

Le cercle (C) *de centre* Ω *et de rayon* R *est l'ensemble des points* M *du plan tels que* $\Omega M = R$ *on le note* $C(\Omega, R)$.

Propriété 27 .

Une équation cartésienne du cercle (C) *de centre* $\Omega(a,b)$ *et de rayon* R *est* :

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

que l'on peut écrire

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \quad où \;\; c = a^2 + b^2 - R^2$$

Démonstration 28 .

Soit $M(x,y)$ *un point du plan, on a*

$$\begin{aligned} M(x,y) \;\epsilon\; (C) &\iff \Omega M = R \\ &\iff \Omega M^2 = R^2 \\ &\iff \left(\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2}\right)^2 = R^2 \\ &\iff (x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2. \end{aligned}$$

Exemple 29 .

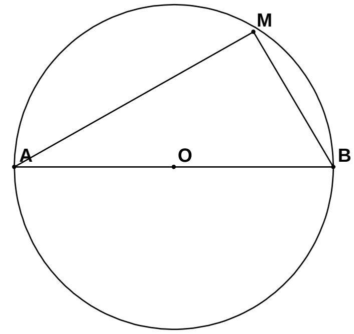
Une équation du cercle (C) *du centre* $\Omega(1,-1)$ *et de rayon* $\sqrt{2}$ *est* :

$$(x-1)^2 + (y+1)^2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$$

que l'on peut écrire

$$x^2 + y^2 - 2x + 2y = 0.$$

Équation d'un cercle définie par son diamètre



$$\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB}$$

Propriété 30 .

Soient $A(x_A, y_A)$ *et* $B(x_B, y_B)$ *deux points du plan. Soit* (C) *l'ensemble des points* M *du plan vérifiant*

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0.$$

Alors (C) *est le cercle de diamètre* $[AB]$*. Une équation de* (C) *est donnée par :*

$$(x - x_A)(x - x_B) + (y - y_A)(y - y_B) = 0$$

Exemple 31 .

Soient deux points $A(-1, 2)$ *et* $B(1, -3)$.

Une équation cartésienne du cercle (C) *de diamètre* $[AB]$ *est :*

$$(x + 1)(x - 1) + (y - 2)(y + 3) = 0$$

c'est-à-dire

$$x^2 + y^2 + y - 7 = 0$$

Exemple 32 .

Déterminons une équation du cercle (C) *de diamètre* $[AB]$ *tel que* $A(1, 3)$ *et* $B(-1, 1)$.

Soit $M(x, y)$ *un point du plan, on a*

$$\begin{aligned} M(x,y) \ \epsilon \ (C) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = 0 \\ &\Longleftrightarrow (1 - x)(1 - x) + (3 - y)(1 - y) = 0 \\ &\Longleftrightarrow (x - 1)(x + 1) + (y - 3)(y - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0. \end{aligned}$$

Représentation paramétrique d'un cercle

Rappel 33 .

Le cercle (C) *de centre* $\Omega(a, b)$ *et de rayon* R *est l'ensemble des points* $M(x, y)$ *du plan tel que :* $\begin{cases} x = a + R\cos\theta \\ \\ y = b + R\sin\theta \end{cases} \ / \ (\theta \in \mathbb{R})$

Ce système est appelé une représentation paramétrique du cercle (C) *dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Exemple 34 .

Une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega\,(-1,4)$ *et de rayon* 2 *est* :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\cos\theta \\ \\ y=4+2\sin\theta \end{array}\right. \;/\,(\theta\in\mathbb{R})$$

Exemple 35 .

Déterminer l'ensemble des points $M\,(x,y)$ *du plan tels que* :

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\cos\theta \\ y=3+2\sin\theta \end{array}\right. \;/\,(\theta\in\mathbb{R})$$

Soit $M\,(x,y)$ *un point du plan dont les coordonnées vérifient le système donné.*
On a

$$\left\{\begin{array}{l} x=-1+2\cos\theta \\ \\ y=3+2\sin\theta \end{array}\right. \;/\,(\theta\in\mathbb{R})$$

donc

$$\left\{\begin{array}{l} x+1=2\cos\theta \\ \\ y-3=2\sin\theta \end{array}\right. \;/\,(\theta\in\mathbb{R})$$

D'où

$$(x+1)^2+(y-3)^2=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta=4.$$

Par suite $(x+1)^2+(y-3)^2=4$ *est une équation du cercle* (C) *de centre* $\Omega\,(-1,3)$ *et de rayon* 2.

Étude de l'ensemble des points $M\,(x,y)$ du plan tels que : $x^2+y^2+ax+by+c=0$

Soit a, b et c trois nombres réels, on considère l'ensemble (E) défini par :

$$(E)=\left\{M\,(x,y)\,/\;x^2+y^2+ax+by+c=0\right\}$$

Soit $M\,(x,y)$ un point du plan, on a

$$
\begin{aligned}
M(x,y)\ \epsilon\ (E) &\Longleftrightarrow x^2+y^2+ax+by+c=0\\
&\Longleftrightarrow \left(x^2+ax\right)+\left(y^2+by\right)+c=0\\
&\Longleftrightarrow \left(x^2+2\times\frac{a}{2}\times x+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2\right)+\\
\left(y^2+2\times\frac{b}{2}\times y+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2\right)+c &= 0\\
&\Longleftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-c\\
&\Longleftrightarrow \left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4}
\end{aligned}
$$

On considère le point $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$, on a :

$$
M(x,y)\ \epsilon\ (E) \Longleftrightarrow \Omega M^2=\frac{a^2+b^2-4c}{4} \qquad (*)
$$

L'égalité $(*)$ nous mène à considèrer les trois cas suivants :

Premier cas : Si $a^2+b^2-4c<0$ alors l'égalité $(*)$ est fausse, donc l'ensemble (E) est l'ensemble vide.

Deuxième cas : Si $a^2+b^2-4c=0$ alors l'égalité $(*)$ devient : $\Omega M^2=0$, ceci signifie que $M=\Omega$. Donc $(E)=\{\Omega\}$.

Troisième cas : Si $a^2+b^2-4c>0$ alors l'égalité $(*)$ devient : $\Omega M=\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$, ceci signifie que (E) est le cercle de centre Ω et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$.

Propriété 36 .

Soit a,b et c trois nombres réels et (E) l'ensemble des points $M(x,y)$ du plan qui vérifient $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

- *(E) est un cercle de centre $\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{a^2+b^2-4c}}{2}$ si et seulement si* $a^2+b^2-4c>0$.
- Si $a^2+b^2-4c<0$ *alors (E) est l'ensemble vide.*
- Si $a^2+b^2-4c=0$ *alors* $(E)=\left\{\Omega\left(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2}\right)\right\}$.

Exemple 37 .

Déterminer dans chaque cas la nature de l'ensemble (E) des points $M(x,y)$ du plan vérifiant l'équation :

1. $x^2 + y^2 - x + y - \dfrac{1}{2} = 0$

2. $x^2 + y^2 + 2x + 3y + 5 = 0$

3. $x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 = 0$

♣ *On a* $a = -1$, $b = 1$ *et* $c = \dfrac{-1}{2}$ *alors*

$$a^2 + b^2 - 4c = (-1)^2 + 1 - 4 \times \left(\frac{-1}{2}\right) = 4 > 0$$

donc (E) *est le cercle de centre* $\Omega\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{-1}{2}\right)$ *et de rayon* $R = \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$.

♣ *On a* $a = 2$, $b = 3$ *et* $c = 5$ *alors*

$$a^2 + b^2 - 4c = 2^2 + 3^2 - 4 \times 5 = -7 < 0$$

donc $(E) = \phi$.

♣ *On a* $a = -6$, $b = 2$ *et* $c = 10$ *alors*

$$a^2 + b^2 - 4c = (-6)^2 + 2^2 - 4 \times 10 = 0$$

donc $(E) = \{\Omega\,(3, -1)\}$.

Exemple 38 .

1. *Quelle est la nature de l'ensemble* (Γ) *des points* $M(x; y)$ *tels que :* $x^2+y^2-6x+2y+5 = 0$ *?*

$$\begin{aligned} M\,(x, y)\ \epsilon\ (\Gamma) &\iff x^2 + y^2 - 6x + 2y + 5 = 0 \\ &\iff x^2 - 6x + y^2 + 2y + 5 = 0 \\ &\iff (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5 \end{aligned}$$

(Γ) *est le cercle de centre* $C\,(3, -1)$ *et de rayon* $R = \sqrt{5}$.

2. *Quelle est la nature de l'ensemble* (Γ) *des points* $M(x; y)$ *tels que :* $x^2+y^2-4x+5 = 0$ *?*

$$\begin{aligned} M\,(x, y)\ \epsilon\ (\Gamma) &\iff x^2 + y^2 - 4x + 5 = 0 \\ &\iff x^2 - 4x + y^2 + 5 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 + y^2 - 4 + 5 = 0 \\ &\iff (x-2)^2 + y^2 + 1 = 0 \\ &\iff \left(x^2 - 2\right)^2 + y^2 = -1 \end{aligned}$$

La dernière égalité est impossible. Donc (Γ) *est l'ensemble vide.*

3. *Quelle est la nature de l'ensemble* (Γ) *des points* $M(x;y)$ *tels que :* $x^2+y^2-6x+2y+10=0$ *?*

$$\begin{aligned} M(x,y)\ \epsilon\ (\Gamma) &\iff x^2+y^2-6x+2y+10=0 \\ &\iff x^2-6x+y^2+2y+10=0 \\ &\iff (x-3)^2+(y+1)^2-9-1+10=0 \\ &\iff (x-3)^2+(y+1)^2=0 \\ &\iff \begin{cases} x=3 \\ y=-1 \end{cases} \end{aligned}$$

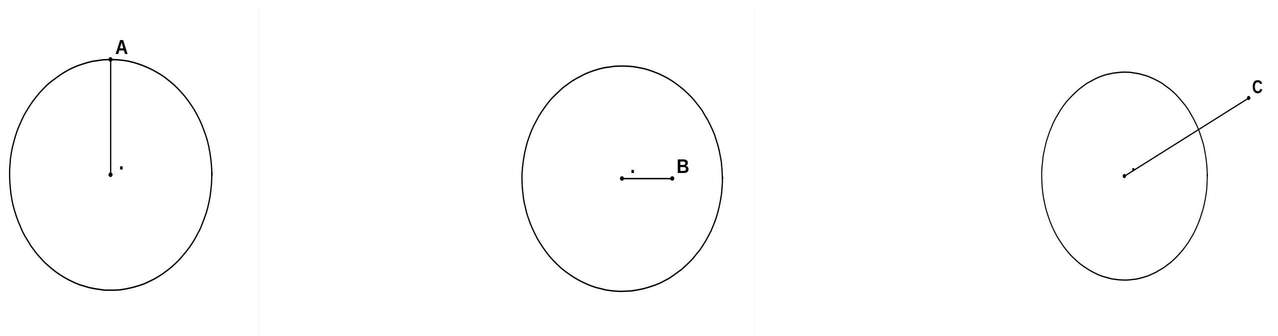
Donc

$$(\Gamma)=\{(3,-1)\}$$

Intérieur et extérieur d'un cercle

Définition 39 *Soit* (C) *un cercle de centre* Ω *et de rayon* R *et* M *un point du plan.*

- *Le point* M *est sur le cercle* (C) *si et seulement si :* $\Omega M=R$.
- *Le point* M *est à l'intérieur du cercle* (C) *si et seulement si :* $\Omega M<R$.
- *Le point* M *est l'extérieur du cercle* (C) *si et seulement si :* $\Omega M>R$.



$\Omega A=R$ *(le point A est sur le cercle* (C)*)* $\Omega B<R$ *(le point B est à l'intérieur du cercle* (C)*)* $\Omega C>R$ *(le point C est à l'extérieur du*

Résultats. .

Soit (C) un cercle d'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Soit $M(x_0,y_0)$ un point du plan.

- M est un point du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c=0$.
- M est à l'intérieur du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c<0$.
- M est à l'extérieur du cercle (C) si et seulement si : $x_0^2+y_0^2+ax_0+by_0+c>0$.

Exemple 40 .

Soit (C) *le cercle d'équation :* $x^2+y^2-4x-8y-5=0$ *et* $A(2,3)$, $B(2,9)$ *et* $C(2,1)$.
On a : $2^2+3^2-4\times2-8\times3-5=-24<0$ *donc* A *est à l'intérieur de* (C).
On a : $2^2+9^2-4\times2-8\times9-5=0$ *donc* $B\in(C)$.
On a : $2^2+1^2-4\times2-8\times1-5=-16<0$ *donc* C *est à l'extérieur de* (C).

Exemple 41 .

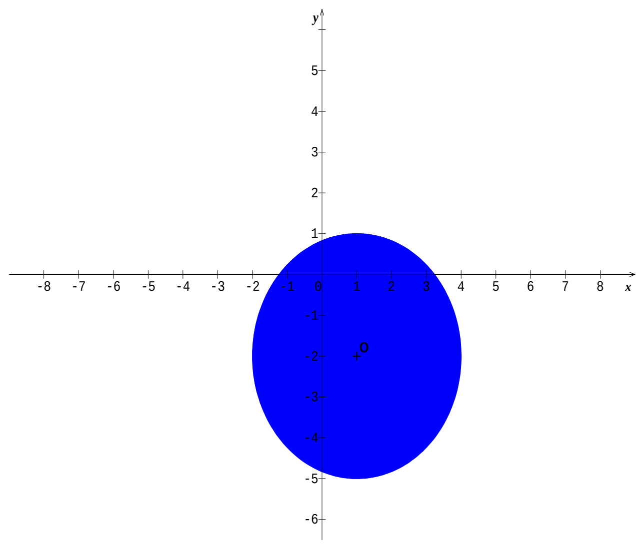
Résoudre graphiquement l'inéquation suivante :

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 \leq 0.$$

On a

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0 \iff (x-1)^2 + (y+2)^2 = 9.$$

Donc $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 4 = 0$ est une équation cartésienne du cercle (C) de centre $\Omega(1, -2)$ et de rayon $R = 3$. D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est formé des couples de coordonnées des points se trouvant à l'intérieur du cercle ou sur le cercle (C). Autrement dit sur le disque fermé de centre O et de rayon 3.



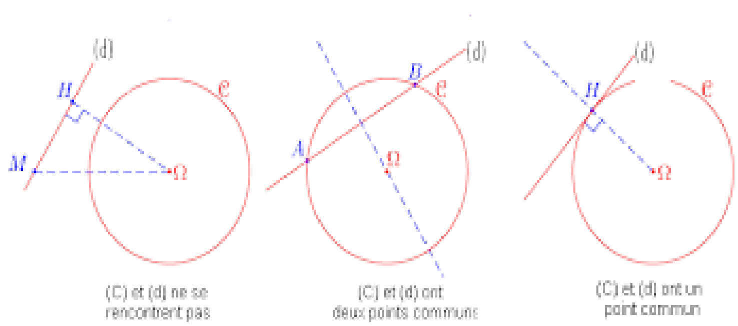
Positions relatives d'une droite et d'un cercle

Pour étudier la position relative d'un cercle (C) de centre O et de rayon R avec une droite (Δ), on peut calculer la distance d du centre O à la droite (Δ) et la comparer au rayon R.

Propriété 42 .

Soit (C) un cercle de centre Ω et de rayon R, et (D) une droite dans le plan.

- Si $d(\Omega, (D)) > R$, *alors (D) ne coupe pas (C).*
- Si $d(\Omega, (\Delta)) < R$, *alors (D) coupe (C) en deux points distincts.*
- Si $d(O, (\Delta)) = R$, *alors (D) coupe (C) en un seul point. ((D) est tangente à (C))*



Démonstration 43 .

Soient (C) *le cercle de centre* Ω *et de rayon* R *et* (D) *une droite.*
Notons H *le projeté orthogonal de* Ω *sur* (D) *.*
On sait que $d = OH$*.*

■ Si $(C) \cap (\Delta) \neq \emptyset$, *il existe un point* M *dans l'intersection* $(C) \cap (\Delta)$, *et le théorème de Pythagore donne*

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + MH^2$$

donc $\Omega H \leq \Omega M$, *ou encore* $d \leq R$. *On peut donc affirmer que si* $R < d$ *alors*

$$(C) \cap (\Delta) = \emptyset$$

■ *On suppose que* $d = R$. *Dans ce cas* $\Omega H = R$ *et* $H \in (C) \cap (\Delta)$ *. Réciproquement, si* $M \in (C) \cap (\Delta)$, *alors*

$$\Omega M^2 = \Omega H^2 + MH^2$$

ceci signifie que : $MH = 0$, *donc* $M = H$. *Donc*

$$(C) \cap (\Delta) = \{H\}\,.$$

■ *On suppose que* $d < R$, *d'après le théorème de Pythagore on a*

$$\begin{aligned} M \,\epsilon\, (C) \cap (D) \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \Omega M = R \\ \\ \Omega M^2 = \Omega H^2 + MH^2 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} OM = R \\ \\ MH = \sqrt{R^2 - d^2} \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad M \in \{M_1, M_2\} \end{aligned}$$

où M_1 *et* M_2 *représentent les deux points de la droite* (D) *situé à la distance* $\sqrt{R^2 - d^2}$ *de* H. *Ceci signifie que la doite* (d) *coupe le cercle* (C) *en deux points distincts.*

Exemple 44 .

Étudier la position relative du cercle (C) *de centre* $\Omega\,(1, 2)$ *et de rayon* $R = 2$ *et de la droite* (D) *dans chacun des cas suivants :*

1. $(D) : x + y + 2 = 0.$
2. $(D) : x - y + 2 = 0.$

Méthode de travail : .

Pour déterminer la position relative d'une droite (D) *d'équation :* $ax + by + c = 0$ *et d'un cercle* (C) *de centre* Ω *et de rayon* R, *on peut suivre les étapes suivantes :*

- *On calcule la distance d du point Ω à la droite (D) en appliquant la formule suivante :*

$$d = d\left(\Omega, (D)\right) = \frac{|ax_\Omega + by_\Omega + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

- *On compare les deux nombres réels d et R.*

■ *On a* $d = d\left(\Omega, (D)\right) = \dfrac{|1+2+2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$.

Comme $2 < \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$ *alors* $R < d$. *Donc la droite* (D) *ne coupe pas le cercle* (C).

■ *On a* $d = d\left(\Omega, (D)\right) = \dfrac{|1-2+2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

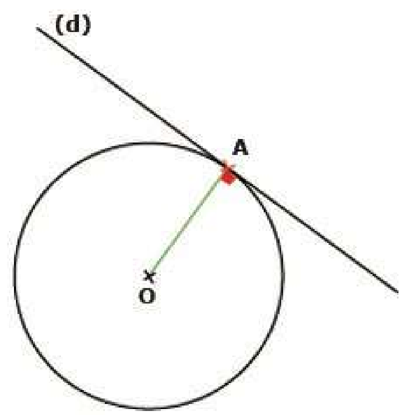
Comme $\dfrac{\sqrt{2}}{2} < 2$ *alors* $d < R$. *Donc la droite* (D) *coupe le cercle* (C) *en deux points distincts.*

Équation cartésienne d'une droite tangente à un cercle en un point donné de ce cercle

Définition et propriété 45 .

A est un point du cercle (C) de centre O.

La tangente en A au cercle (C) est la droite passant par A et perpendiculaire à la droite (OA).



Propriété 46 .

Soit (C) un cercle d'équation : $x^2+y^2+ax+by+c=0$ et $A(x_0, y_0)$ un point de (C). Une équation de la tangnete au cercle (C) au point A est :

$$(x-x_0)\left(x_0+\frac{a}{2}\right)+(y-y_0)\left(y_0+\frac{b}{2}\right)=0.$$

Démonstration 47 .

Un vecteur normal à la tangente à (C) en A est donné par : $\overrightarrow{\Omega A}$.

Un point $M(x,y)$ *est élément de cette tangente ssi* $\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM}=0$. *Comme* $\overrightarrow{\Omega A}\left(x_0+\frac{a}{2},y_0+\frac{b}{2}\right)$ *et* $\overrightarrow{AM}(x-x_0,y-y_0)$ *donc*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM} &= 0\\ &\Longleftrightarrow \left(x_0+\frac{a}{2}\right)(x-x_0)+\left(y_0+\frac{b}{2}\right)(y-y_0)=0\\ &\Longleftrightarrow (x-x_0)\left(x_0+\frac{a}{2}\right)+(y-y_0)\left(y_0+\frac{b}{2}\right)=0.\end{aligned}$$

Exemple 48 *.*

On considère le cercle (C) *d'équation :* $x^2+y^2-2x-4y=0$ *et le point* $A(2,4)$ *de* (C)*.*

D'après la propriété on a

$$(x-x_0)\left(x_0+\frac{a}{2}\right)+(y-y_0)\left(y_0+\frac{b}{2}\right)=0$$

en prenant : $x_0=2$, $y_0=4$, $a=-2$ *et* $b=-4$ *donc une équation de la tangente au cercle* (C) *en* A *est :*

$$(x-2)(-1+2)+(y-4)(-2+4)=0$$

c'est-à-dire

$$(D): x+2y-10=0.$$

Exemple 49 *.*

Soit (C) *un cercle de centre* $\Omega(0,1)$ *et de rayon* $R=2\sqrt{2}$.

Déterminer une équation cartésienne de la tangente (D) *au point* $A(-2,3)$*.*

Soit $M(x,y)$ *un point du plan, on a*

$$\begin{aligned}M(x,y)\ \epsilon\ (D) &\Longleftrightarrow \overrightarrow{\Omega A}.\overrightarrow{AM}=0\\ &\Longleftrightarrow -2(x+2)+2(y-3)=0\\ &\Longleftrightarrow -2x+2y-10=0\end{aligned}$$

donc $(D): x-y+5=0$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com