Les polynômes

Notion de polynôme, égalité de deux polynômes

Notion de polynôme, degré d'un polynôme

Définition 1 .

Soient a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 *et* a_0 *des réels et* n *un entier naturel.*

Toute expression qui s'écrit sous la forme $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2x^2 + a_1x + a_0$ *est appelée polynôme qu'on note par :* $P(x)$ *ou* $Q(x)$ *ou* $R(x)$...

a_n, a_{n-1}, ..., a_2, a_1 *et* a_0 *sont appelés coefficients du polynôme* $P(x)$, a_k *est le coefficient du terme de degré* k *pour* $k \in \{0, 1, 2, ..., n\}$, *et* a_0 *est appelé terme constant.*

Si $a_n \neq 0$ *alors* n *est appelé le degré de* $P(x)$, *on écrit* $\deg(P(x))$.

Exemple 2 .

Soit le polynôme : $P(x) = \frac{1}{2}x^3 - \sqrt{2}x^2 + x - \frac{1}{3}$.

♣ $\frac{1}{2}x^3$ *est un monôme de degré* 3.

♣ $-\sqrt{2}x^2$ *est un monôme de degré* 2.

♣ x *est un monôme de degré* 1.

♣ $\frac{-1}{3}$ *est un monôme de degré* 0, *et appelé le terme constant.*

♣ *Le degré du polynôme* $P(x)$ *est* 3. $(\deg(P(x)) = 3)$

Remarque 3 .

♣ *Un polynôme est une somme finie de monômes.*

♣ $x^2 + \frac{1}{x} - 2$; $x^3 + \sqrt{x} - 2$ *et* $x^3 + |x| - 2$ *ne sont pas des polynômes.*

♣ $-5x + 2x^7 - 4x^{30}$ *est un trinôme de degré* 30.

♣ $\sqrt{2}x^{120} + 5x^{13}$ *est un binôme de degré* 120.

♣ *Par convention* 0 *est le polynôme nul* (*qui n'a pas de degré*).

♣ *Un polynôme nul est un polynôme dont tous les coefficients sont nuls.*

♣ *On peut écrire le polynôme* $P(x) = x^4 + 4x^2 + x - x^3 + 3$ *sous la forme* $P(x) = x^4 - x^3 + 4x^2 + x + 3$ *et on dit qu'on ordonné* $P(x)$ *suivant les puissances décroissantes. On peut écrire le polynôme sous la forme* $P(x) = 3 + x + 4x^2 - x^3 + x^4$ *et on dit qu'on a ordonné* $P(x)$ *suivant les puissances croissantes.*

♣ *Le mot ("mono") signifie seul. On en déduit alors le sens de binôme, de trinôme. Par exemple pour* $P(x) = ax + b$, $(a \neq 0)$ $P(x)$ *est appelé binôme de degré* 1. *Pour* $P(x) = ax^2 + bx + c$, $(a \neq 0)$, $P(x)$ *est un trinôme du seconde degré.*

Exemple 4 .

Identifier parmi les expressions suivantes celles qui sont des polynômes.

1. $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 - \sqrt{3}$.
2. $Q(x) = 2x^2 - x - \sqrt{x}$
3. $R(x) = 5|x|^2 + 4|x| - 5$
4. $S(x) = x^4 + \frac{1}{x} + 3$
5. $F(x) = (a-1)x^4 + x^2 + x + 1$ *avec* $a \in \mathbb{R}$.

♣ $P(x)$ *est un polynôme de degré* 3. *On peut écrire :* $P(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{\sqrt{2}}{2}x^2 + 0x - \sqrt{3}$.

♣ $Q(x)$ *n'est pas un polynôme, car* $\sqrt{x}$ *n'est pas un monôme.*

♣ $R(x)$ *n'est pas un polynôme, car* $|x|$ *n'est pas un monôme.*

♣ $S(x)$ *n'est pas un polynôme, car* $\frac{1}{x}$ *n'est pas un monôme.*

♣ Si $a = 1$, *alors* $F(x)$ *est un polynôme de degré* 2. Si $a \neq 1$, *alors* $F(x)$ *est un polynôme de degré* 4.

Égalité de deux polynômes

Proprieté 5 .

Soient $P(x) = a_n x^n + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ *et* $Q(x) = b_m x^m + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0$ *deux polynômes non nuls à coefficients réels.*

$P(x)$ *et* $Q(x)$ *sont égaux si et seulement s'ils ont le même degré et les coefficinets des monômes de même degré sont égaux, c'est-à-dire :*

$$n = m \ \text{ et } \ b_m = a_n \text{ et...et } b_1 = a_1 \text{ et } b_0 = a_0$$

Autrement dit :

$$P(x) = Q(x) \quad \text{éq :} \begin{cases} n = m \\ a_i = b_i, \quad \text{pour tout } i \in \{0, 1, ..., n\} \end{cases}$$

Exemple 6 .

Étudier l'égalité des polynômes $P(x)$ et $Q(x)$:

1. $P(x) = x^3 + 2x^2(x-1) + x$ *et* $Q(x) = x^2(3x-2) + x$
2. $P(x) = x^2 + 3x - 4$ *et* $Q(x) = x^3 + (x-2)^2$

♣ *On a*

$$P(x) = x^3 + 2x^3 - 2x^2 + x = 3x^3 - 2x^2 + x \quad et \quad Q(x) = 3x^3 - 2x^2 + x$$

. Donc $P(x) = Q(x)$.

♣ *On a*

$$P(x) = x^2 + 3x - 4 \text{ et } Q(x) = x^3 + x^2 - 4x + 4.$$

puisque le degré du polynôme $P(x)$ *est* 2 *et le degré du polynôme* $Q(x)$ *est* 3, *donc* $P(x) \neq Q(x)$.

Exemple 7 .

On considère les deux polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ *tels que :*

$$P(x) = 2x^2 + 3x - 14 \quad et \quad Q(x) = ax^2 + (b-2a)x - 2b$$

Déterminer a *et* b *pour que les deux polynômes soient égaux.*
On cherche a *et* b.

$$P(x) = Q(x) \ \text{éq} : \begin{cases} a = 2 \\ b - 2a = 3 \\ -2b = -14 \end{cases} \text{éq} : \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 + 2a \\ b = \dfrac{14}{2} \end{cases} \text{éq} : \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \\ b = 7 \end{cases} \text{éq} : \begin{cases} a = 2 \\ b = 7 \end{cases}$$

donc les deux polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ *sont égaux si et seulement si* $a = 2$ *et* $b = 7$.

Opérations sur les polynômes

Somme et produit de deux polynômes

Proprieté 8 .

Soient $P(x)$ *et* $Q(x)$ *deux polynômes non nuls à coefficients réels.*

♣ *La somme des deux polynômes* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *non nuls est un polynôme, noté* $(P+Q)(x)$ *tel que pour tout réel* x *on a :*

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x).$$

♣ *Le produit des deux polynômes* $P(x)$ *et* $Q(x)$ *non nuls est un polynôme, noté* $(P \times Q)(x)$ *tel que pour tout réel* x *on a :*

$$(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x).$$

♣ *Le produit d'un polynôme $P(x)$ et un scalaire α est un polynôme $(\alpha P)(x)$ tel que pour tout réel x on a*

$$(\alpha P)(x) = \alpha P(x).$$

Exemple 9 *On considère les polynômes suivants :* $Q(x) = x - 1$ *et* $P(x) = x^2 + 1$.

♣ $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = x - 1 + x^2 + 1 = x^2 + x$.

♣ $(P-Q)(x) = P(x) - Q(x) = x^2 + 1 - (x-1) = x^2 - x + 1 + 1 = x^2 - x + 2$.

♣ $(P \times Q)(x) = P(x) \times Q(x) = (x^2+1)(x-1) = x^3 - x^2 + x - 1$.

Degré d'une somme, degré d'un produit de deux polynômes

Proprieté 10 .
Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls.

♣ $\deg((P+Q)(x)) \leq \max(\deg(P(x)), \deg(Q(x)))$,

♣ $\deg((P \times Q)(x)) = \deg(P(x)) + \deg(Q(x))$,

♣ $\deg((\alpha P)(x)) = \deg(P(x))$ *pour tout réel α non nul.*

Remarque 11 .
On considère les deux polynômes : $P(x) = -5x^4 + 4x - 7$ *et* $Q(x) = 5x^4 + x^2 + 3$.
On a

$$(P+Q)(x) = P(x) + Q(x) = x^2 + 4x - 4$$

et comme $\deg(P(x)) = \deg(Q(x)) = 4$ *et* $\deg((P+Q)(x)) = 2$. *Donc*

$$\deg((P+Q)(x)) \neq \max(\deg(P(x)), \deg(Q(x)))$$

Remarque 12 .
Si $\deg(P(x)) \neq \deg(Q(x))$, *alors* $\deg((P+Q)(x)) = \max(\deg(P(x)), \deg(Q(x)))$.

Racine d'un polynôme, factorisation d'un polynôme

Division euclidienne

Théorème 13 .
Pour tous polynômes $A(x)$ et $B(x)$ non nuls à coefficients réels, il existe un unique couple de polynôme $(Q(x), R(x))$ tels que :

$$A(x) = Q(x)B(x) + R(x) \qquad \text{avec} \quad \deg(R(x)) < \deg(B(x))$$

$Q(x)$ est le quotient et $R(x)$ est le reste de la division euclidienne de $A(x)$ par $B(x)$.

Démonstration 14 *Admis*

Cas particulier

Soit $P(x)$ un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et a un réel, il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $n-1$ tel que :

$$P(x) = (x-a)\,Q(x) + P(a)$$

♣ $P(a)$ est le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$.

♣ $Q(x)$ est le quotient de la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$.

Démonstration 15 .

Dans la division euclidienne de $P(x)$ par $(x-a)$, il existe un unique couple $(Q(x), R(x))$ de polynômes tels que :

$$P(x) = (x-a).Q(x) + R(x) \quad \textit{avec} \quad \deg(R(x)) < \deg(x-a) = 1$$

donc $\deg(R(x)) = 0$ *d'où* $R(x) = c$, $c \in \mathbb{R}^*$ *(est un polynôme constant). Donc*

$$P(x) = (x-a).Q(x) + c$$

en évalue en $x = a$, on obtient

$$P(a) = (a-a).Q(a) + c \quad \textit{éq} : \; c = P(a)$$

d'où $c = P(a)$, ce qui signifie que le reste de la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-a$ est le polynôme constant égal à $P(a)$:

$$P(x) = (x-a).Q(x) + P(a)$$

Définition 16 .

Soient $P(x)$ et $Q(x)$ deux polynômes non nuls à coefficients réels, on dit que $Q(x)$ divise $P(x)$ si et seulement si le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ est nul.

Exemple 17 .

On considère les polynômes suivnats : $P(x) = x^3 - x^2 + x - 1$ et $Q(x) = x - 2$.

On effectue la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $Q(x)$ on obtient :

$$P(x) = (x-2)\left(x^2 + x + 3\right) + 5$$

Puisque le reste de la division euclidienne de $P(x)$ par $Q(x)$ est non nul alors le polynôme $Q(x)$ ne divise pas $P(x)$.

Racine d'un polynôme et factorisation

Définition 18 .

Soit $P(x)$ un polynôme à coefficients réels et a un nombre réel. On dit que a est une racine ou un zéro de $P(x)$ si $P(a) = 0$.

Exemple 19 .

On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 8$.

♣ *On a* $P(2) = 0$ *donc* 2 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

♣ *On a* $P(1) = -7 \neq 0$ *donc* 1 *n'est pas une racine du polynôme* $P(x)$.

Théorème 20 .

Soit $P(x)$ *un polynôme de degré* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* a *un nombre réel.*

$P(a) = 0$ *si et seulement s'il existe un polynôme* $Q(x)$ *tel que pour tout réel* x : $P(x) = (x-a)Q(x)$. *On dira dans ce cas que le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $x - a$.

Démonstration 21 .

Soit $P(x)$ *un polynôme à coefficients réels de degré* $n \in \mathbb{N}^*$ *et* a *un réel il existe un polynôme* $Q(x)$ *de degré* $n-1$ *tel que :*

$$P(x) = (x-a)Q(x) + P(a)$$

on a $P(a) = 0$ *si et seulement si* $P(x) = (x-a)Q(x)$ *ssi le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $x - a$.

Théorème 22 .

Soit $P(x)$ *un polynôme à coefficients réels de degré* $n \in \mathbb{N}^*$. *Le polynôme* $P(x)$ *possède au plus* n *racines réelles.*

Démonstration 23 *Admis*

Exemple 24 .

On considère le polynôme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$.

1. *Montrer que* -3 *est une racine du polynôme* $P(x)$.
2. *Factoriser le polynôme* $P(x)$.

♣ *Montrons que* -3 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

On a $P(-3) = 0$ *donc* -3 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

♣ *On factorise le polynôme* $P(x)$.

On a -3 *est une racine du polynôme* $P(x)$ *donc* $P(x)$ *est divisible par* $(x+3)$, *et on déduit qu'il existe un polynôme* $Q(x)$ *tel que :*

$$P(x) = (x+3)Q(x)$$

On cherche le polynôme $Q(x)$:

Méthode 01 .*On effectue la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x+3)$.

On obtient

$$P(x) = (x+3)\left(x^2 - 2\right)$$

Méthode 02 . *On a* $\deg(P(x)) = 3$ *et* $\deg(x+3) = 1$ *donc* $\deg(Q(x)) = 2$, *d'où le polynôme* $Q(x)$ *s'écrit sous la forme*

$$Q(x) = ax^2 + bx + c \quad ,(\text{avec } a \neq 0)$$

donc

$$\begin{aligned} P(x) &= (x+3)\left(ax^2+bx+c\right) \\ &= ax^3 + (b+3a)x^2 + (c+3b)x + 3c \end{aligned}$$

et comme $P(x) = x^3 + 3x^2 - 2x - 6$ *alors d'après l'égalité de deux polynômes, on obtient*

$$\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b+3a=3 \\ c+3b=-2 \\ 3c=-6 \end{array}\right. \quad \text{éq} : \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b+3\times 1=3 \\ c=-2-3b \\ c=-\dfrac{6}{3} \end{array}\right. \quad \text{éq} : \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=3-3 \\ c=-2-3b \\ c=-2 \end{array}\right. \quad \text{éq} : \left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=0 \\ c=-2 \end{array}\right.$$

donc

$$P(x) = (x+3)\left(x^2-2\right)$$

Exemple 25 .

On considère les polynômes $P(x)$ *et* $Q(x)$ *tels que :* $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ *et* $Q(x) = x^2 - 4x + 3$.

1. *Effectuer la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $x+2$.

   a) *Montrer que* $Q(x)$ *est divisible par* $x-3$.

   b) *Factoriser* $P(x)$ *en produit de polynômes de premier degré.*

Correction 26 .

1. *On effectue la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $x+2$.

   On obtient

$$P(x) = (x+2)\left(x^2-4x+3\right) \quad \text{avec } Q(x) = x^2-4x+3$$

   a) *Montrons que* $Q(x)$ *est divisible par* $x-3$.

   On a $Q(3) = 0$ *donc* $Q(x)$ *est divisible par* $x-3$, *et on déduit qu'il existe un polynôme* $R(x)$ *tel que :*

$$Q(x) = (x-3)R(x)$$

   on a $\deg(Q(x)) = 2$ *et* $\deg(x+2) = 1$ *donc* $\deg(R(x)) = 1$, *d'où le polynôme* $R(x)$ *s'écrit sous la forme*

$$R(x) = ax + b \quad ,(\text{avec } a \neq 0)$$

donc

$$\begin{array}{rcl} Q(x) & = & (x-3)(ax+b) \\ & = & ax^2+(b-3a)x-3b \end{array}$$

et comme $Q(x)=x^2-4x+3$*, alors d'après l'égalité de deux polynômes, on obtient*

$$\text{éq}:\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b-3a=-4 \\ -3b=3 \end{array}\right. \quad \text{éq}:\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b-3\times 1=-4 \\ b=\dfrac{3}{-3} \end{array}\right. \quad \text{éq}:\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-4+3 \\ b=-1 \end{array}\right. \quad \text{éq}:\left\{\begin{array}{c} a=1 \\ b=-1 \end{array}\right.$$

donc $R(x)=x-1$*. D'où :* $Q(x)=(x-3)(x-1)$ *et comme* $P(x)=(x+2)Q(x)$ *donc*

$$P(x)=(x+2)(x-3)(x-1)$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com