Le Barycentre dans le Plan

Barycentre de deux points pondérés

Point pondéré

Soit A un point du plan et a un nombre réel. Le couple (A, a) s'appelle un **point pondéré,** et le réel a non nul s'appelle **la masse** du point A (on dit aussi que le point A est affecté du coefficient a)

Propriété et définition 1 .
Soit (A, a) et (B, b) deux points pondéré du plan tels que $a + b \neq 0$. Il existe un unique point G vérifiant : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0}$. Le point G s'appelle le barycentre des points pondérés (A, a) et (B, b).

Démonstration 2 .
Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\left(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow (a+b)\,\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow (a+b)\,\overrightarrow{AG} = b\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

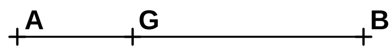
- Si $a + b \neq 0$ *alors l'équation équivaut à :* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$. *Le point G est unique.*
- Si $a+b = 0$ *alors l'équation équivaut à :* $b\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0}$. *Cette équation n'admet pas de solution si $A \neq B$ et $b \neq 0$ et en admet une infinité si $A = B$ ou $b = 0$.*

Remarque 3 .
Le point G s'appelle aussi le barycentre du système pondéré $\{(A, a); (B, b)\}$.

Exemple 4 .
Deux points A et B étant données, palcer G le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (B, 1)\}$.
On a G est le barycentre du système pondéré $\{(A, 2); (B, 1)\}$.

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

d'où la construction du point G



Remarque 5 .

Si G *est le barycentre de* (A,a) *et* (B,b) *alors :* $\overrightarrow{AG}=\dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BG}=\dfrac{a}{a+b}\overrightarrow{BA}$.

Exemple 6 .

Si G *est le barycentre des points* $(A,1)$ *et* $(B,2)$ *alors* $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{1+2}\overrightarrow{AB}$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{AG}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ *et on a aussi* $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$.

Propriétés du barycentre de deux points

Homogénérité :

Propriété 7 *Si* G *est le barycentre de* (A,a) *et* (B,b) *alors* G *est aussi le barycentre de* (A,ka) *et* (B,kb) *pour tout réel* k *non nul.*

Démonstration 8 .

Soit G *le barycentre du système pondéré* $\{(A,a);(B,b)\}$.

Soit $k\in\mathbb{R}^*$, *on a*

$$\begin{aligned} a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \\ &\iff k\left(a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}\right)=k.\overrightarrow{0} \\ &\iff ak\overrightarrow{GA}+bk\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

donc G *est aussi le barycentre de* (A,ka) *et* (B,kb) *pour tout réel* k *non nul.*

Remarque 9 .

Si $a=b$ *alors* G *est le milieu du segment de* $[AB]$.

Exemple 10 .

Si G *est le barycentre des points* $(A,6)$ *et* $(B,4)$ *alors*

$$\begin{aligned} 6\overrightarrow{GA}+4\overrightarrow{GB} &= \overrightarrow{0} \\ &\iff \frac{6}{2}\overrightarrow{GA}+\frac{4}{2}\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \\ &\iff 3\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{0} \end{aligned}$$

d'où G *est aussi barycentre des points* $(A,3)$ *et* $(B,2)$.

Propriété caractéristique :

Propriété 11 .

Soit (A, a) et (B, b) deux points pondéré du plan tels que : $a + b \neq 0$. G est le barycentre des deux points pondérés (A, a) et (B, b) si et seulement si pour tout point M du plan on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a + b)\,\overrightarrow{MG}$$

Démonstration 12 .

Soit $M \in (P)$, on a

$$\begin{aligned}
a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} &= a\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}\right) + b\left(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}\right) \\
&= a\overrightarrow{MG} + a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{MG} + b\overrightarrow{GB} \\
&= (a + b)\,\overrightarrow{MG} + \underbrace{a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB}}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= (a + b)\,\overrightarrow{MG}
\end{aligned}$$

Remarque 13 .

Pour $M = A$ dans la propriété caractéristique, on obtient $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$.

Exemple 14 .

Soit A et B deux points distincts, I est le milieu du segment $[AB]$ et G le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -5)$. Déterminer l'ensemble

$$E = \left\{ M \in (P)\ /\ \left\|3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| \right\}$$

où (P) est le plan.

♣ *G est le barycentre de $(A, 3)$ et $(B, -5)$ donc d'après la propriété caractéristique, pour tout point M du plan, on a*

$$3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB} = -2\overrightarrow{MG}$$

♣ *I est le milieu du segment $[AB]$, donc I est le barycentre de $(A, 1)$ et $(B, 1)$ d'où $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = 2\overrightarrow{MI}$.*

Soit $M \in (P)$, on a

$$\begin{aligned}
M \ \epsilon\ (E) &\iff \left\|3\overrightarrow{MA} - 5\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB}\right\| \\
&\iff \left\|-2\overrightarrow{MG}\right\| = \left\|-2\overrightarrow{MI}\right\| \\
&\iff 2MG = 2MI \\
&\iff MG = MI
\end{aligned}$$

donc l'ensemble E est la médiatrice du segment $[GI]$.

Exemple 15 .

Soit E, F *et* K *trois points du plan tels que* : $\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FE}$.

1. *Déterminer deux réels* α *et* β *pour que* K *soit le barycentre de* (E,α) *et* (F,β) .
2. *Déterminer le réel* x *pour que* K *soit le barycentre de* $(E,-2)$ *et* (F,x) .

■ *On cherche* α *et* β.

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{FK} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{FE} \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FK} + \overrightarrow{KE}\right) \\ &\Longleftrightarrow \overrightarrow{FK} - \frac{1}{3}\overrightarrow{FK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{KE} \\ &\Longleftrightarrow \frac{2}{3}\overrightarrow{FK} - \frac{1}{3}\overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0} \\ &\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{KF} + \overrightarrow{KE} = \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

Puisque $(2+1 \neq 0)$ *alors* K *est le barycentre de* $(E,1)$ *et* $(F,2)$ *d'où*

$$\alpha = 1 \quad et \quad \beta = 2.$$

■ *On cherche* x *pour que* K *soit le barycentre de* $(E,-2)$ *et* (F,x) .

On a K *est le barycentre de* $(E,1)$ *et* $(F,2)$ *donc* K *est aussi le barycentre de* $(E,-2)$ *et* $(F-4)$. (*On a multiplié les coefficients par un même réel non nul* (-2)) , *d'où*

$$x = -4.$$

Barycentre de trois points pondérés

Les définitions et propriétés du paragraphe précédent s'étendent au cas de trois points pondérés.

Propriété et définition 16 .

Soit (A,a) , (B,b) *et* (C,c) *trois points pondérés tels que* : $a+b+c \neq 0$. *Il existe un et un seul point* G *vérifiant* : $a\overrightarrow{GA} + b\overrightarrow{GB} + c\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Le point G *s'appelle le barycentre des points pondérés* (A,a) , (B,b) *et* (C,c) .

Démonstration 17 *La démonstration est identique au cas de deux points.*

Exemple 18 .

Si G *est le barycentre des points pondérés* $(A,1)$, $(B,2)$ *et* $(C,3)$ *alors* $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

Remarque 19 .

Si G *est le barycentre des points* (A,a), (B,b) *et* (C,c) *alors* : $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$.

(*cette remarque est utilisée pour construire le point* G).

Exemple 20 .

Si G *est le barycentre des points pondérés* $(A,1)$, $(B,2)$ *et* $(C,3)$ *alors* $\overrightarrow{GA}+2\overrightarrow{GB}+3\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$.

On a aussi

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

Exemple 21 .

On considère les points A, B, C *et* D *tels que* : $\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, *déterminons les réels* a, b *et* c *tels que* D *soit le barycentre de* (A,a), (B,b) *et* (C,c).

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AD} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} \\
\iff & \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) - \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\right) \\
\iff & \overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \\
\iff & \overrightarrow{AD} = \frac{-1}{6}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \\
\iff & \frac{7}{6}\overrightarrow{AD} - \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \\
\iff & 7\overrightarrow{AD} - 3\overrightarrow{DB} + 4\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0} \\
\iff & 7\overrightarrow{DA} + 3\overrightarrow{DB} - 4\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

puisque $(7+3-4 \neq 0)$ *alors* D *est le barycentre des points* $(A,7)$, $(B,3)$ *et* $(C,-4)$. *Donc*

$$a = 7, \quad b = 3 \quad et \quad c = -4.$$

Exemple 22 .

Soit ABC *un triangle et* G *un point tel que* : $2\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB}$. *Montrer que* G *est le barycentre des points* $(A,1)$; $(B,1)$ *et* $(C,2)$.

On a

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{AC} &= 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \\
\iff & 2\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right) = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \\
\iff & 2\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GC} = 3\overrightarrow{AG} - \overrightarrow{GB} \\
\iff & -\overrightarrow{AG} + 2\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{0} \\
\iff & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

puisque $(2+1+2 \neq 0)$, *donc* G *est le barycentre des points pondérés* $(A,1)$; $(B,1)$ *et* $(C,2)$.

Propriétés

Propriété 23 .

Si G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) alors pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre des points pondérés (A, ka) , (B, kb) et (C, kc) .

Propriété 24 .

Soit (A, a) , (B, b) et (C, c) des points pondérés du plan tels que $a + b + c \neq 0$ et G un point du plan. G est le barycentre des points pondérés (A, a) , (B, b) et (C, c) si, et seulement si, pour tout point M du plan on a :

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} + c\overrightarrow{MC} = (a + b + c)\,\overrightarrow{MG}.$$

Remarque 25 .

Pour $M = A$, dans la propriété caractéristique, on obtient $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b+c}\overrightarrow{AB} + \dfrac{c}{a+b+c}\overrightarrow{AC}$ (cette remarque est utilisée pour construire le point G) .

Exemple 26 .

Soit ABC un triangle et G un point tel que G est le barycentre des points pondérés $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

Construire G.

On a G est le barycentre de $(A, 1)$, $(B, 1)$ et $(C, 2)$.

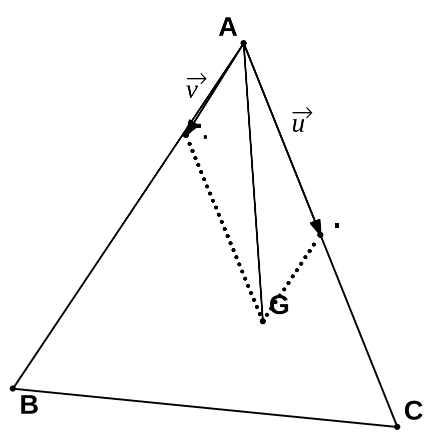
D'après la propriété caractéristique, pour tout point M du plan, on a

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

Pour $M = A$, dans la propriété caractéristique, on obtient

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

d'où la construction du point G



Associativité du barycentre

Propriété 27 .

Soit (A,a) , (B,b) *et* (C,c) *des points pondérés du plan tels que :* $a+b+c \neq 0$ *et* $a+b \neq 0$.

Si G *est le barycentre des points* (A,a) , (B,b) *et* (C,c) *et* H *est le barycentre des points* (A,a) *et* (B,b), *alors* G *est le barycentre des points* $(H,a+b)$ *et* (C,c) .

Démonstration 28 .

On suppose que :

- G *est le barycentre des points* (A,a) , (B,b) *et* (C,c) .
- H *est le barycentre des points* (A,a) *et* (B,b) .

Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GC} &= a\overrightarrow{GH}+b\overrightarrow{GH}+c\overrightarrow{GC} \\
&= a\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH}\right)+b\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BH}\right)+c\overrightarrow{GC} \\
&= a\overrightarrow{GA}+a\overrightarrow{AH}+b\overrightarrow{GB}+b\overrightarrow{BH}+c\overrightarrow{GC} \\
&= \underbrace{a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}}_{=\overrightarrow{0}}+\underbrace{a\overrightarrow{AH}+b\overrightarrow{BH}}_{=\overrightarrow{0}} \\
&= \overrightarrow{0}.
\end{aligned}$$

Ceci signifie que G *est le barycentre des points* $(H,a+b)$ *et* (C,c) .

Exemple 29 .

Soit ABC *un trinagle*

- G *le barycentre des points pondérés* $(A,-2)$; $(B,3)$ *et* $(C,3)$,
- K *le barycentre des points pondérés* $(A,-2)$ *et* $(B,3)$,
- H *le barycentre des points pondérés* $(A,-2)$ *et* $(C,3)$,
- I *le milieu du segment* $[BC]$.

Montrer que G *est le barycentre de* $(K,1)$; $(C,3)$ *et que* G *est le barycentre de* $(B,3)$; $(H,1)$ *et* G *est le barycentre de* $(A,-1)$ *et* $(I,3)$.

- *On a* K *est le barycentre des points pondérés* $(A,-2)$ *et* $(B,3)$, *et* G *est le barycentre de* $\underbrace{(A,-2);(B,3)}$ *et* $(C,3)$, *donc d'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre des points pondérés* $(K,1)$ *et* $(C,3)$.
- *De même on a* H *est le barycentre des points pondérés* $(A,-2)$ *et* $(C,3)$, *et* G *est le barycentre de* $\underbrace{(A,-2);(C,3)}$ *et* $(B,3)$, *donc d'après l'associativité du barycentre on en déduit que* G *est le barycentre des points pondérés* $(H,1)$ *et* $(B,3)$.

- *I est le milieu de $[BC]$, alors I est le barycentre de $(B,1)$ et $(C,1)$ donc I est aussi le barycentre de $(B,3)$ et $(C,3)$ et comme G est le barycentre de $(A,-2)$; $(B,3)$ et $(C,3)$, donc d'après l'associativité du barycentre on en déduit que G est le barycentre des points pondérés $(I,6)$ et $(A,-2)$. D'où G est le barycentre de $(A,-1)$ et $(I,3)$.*

Remarque 30 Si *$a=b=c$, alors le barycentre des points pondérés (A,a), (B,b) et (C,c) est appelé l'isobarycentre des points A, B et C. C'est le centre de gravité du triangle ABC.*

Barycentre de quatre points pondérés

On définit le barycentre de quatre points et ses propriétés comme la définition et les propriétés de barycentre de trois points.

Exemple 31 .

Soit $ABCD$ un quadrilatère.

Montrer que les points $(A,-1)$; $(B,3)$;$(C,1)$ et $(D,1)$ admettent un barycentre.

■ *Le barycentre des points pondérés existe si et seulement si la somme des coefficients est non nulle.*

On a $(-1+3+1+1\neq 0)$ donc le barycentre des points $(A,-1)$; $(B,3)$;$(C,1)$ et $(D,1)$ existe.

D'une façon génerale. On appelle barycentre des points pondérés (A,a) ; (B,b) ; (C,c) et (D,d) le point G défini par :

$$a\overrightarrow{GA}+b\overrightarrow{GB}+c\overrightarrow{GC}+d\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0} \quad \text{avec} \quad a+b+c+d\neq 0$$

Coordonnées du barycentre

Le plan est rapporté à un repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$, soit (A,a); (B,b); (C,c) et (D,d) des points pondérés. Soit $A\left(x_A,y_A\right)$; $B\left(x_B,y_B\right)$; $C\left(x_C,y_C\right)$ et $D\left(x_D,y_D\right)$.

Coordonnées du barycentre de deux points pondérés

Propriété 32 .

Si *G est le barycentre des points pondérés (A,a) et (B,b), alors les coordonnées de G sont :*

$$\begin{cases} x_G=\dfrac{ax_A+bx_B}{a+b} \\ \\ y_G=\dfrac{ay_A+by_B}{a+b} \end{cases}$$

Démonstration 33 .

Soit $M \in (P)$, *on a*

$$a\overrightarrow{MA} + b\overrightarrow{MB} = (a+b)\overrightarrow{MG}$$

en particulier pour $M = O$. *Donc*

$$a\overrightarrow{OA} + b\overrightarrow{OB} = (a+b)\overrightarrow{OG}$$

de plus

$$\overrightarrow{OG} = \frac{a}{a+b}\overrightarrow{OA} + \frac{b}{a+b}\overrightarrow{OB}$$

les coordonnées de $\overrightarrow{OA}$ *sont* $\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ *et les coordonnées de* $\overrightarrow{OB}$ *sont* $\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.

On en déduit que les coordonnées de $\overrightarrow{OG}$ *sont* $\begin{pmatrix} \dfrac{ax_A}{a+b} + \dfrac{bx_B}{a+b} \\ \dfrac{ay_A}{a+b} + \dfrac{by_B}{a+b} \end{pmatrix}$ *c'est-à-dire* $\begin{pmatrix} \frac{ax_A+by_B}{a+b} \\ \frac{ay_A+by_B}{a+b} \end{pmatrix}$.

Exemple 34 .

Soit $A(2,3)$ *et* $B(-1,5)$, *les coordonnées du point* G *barycentre des points pondérés* $(A,4)$ *et* $(B,-3)$ *sont*

$$x_G = \frac{4x_A - 3x_B}{4-3} = 11 \quad et \quad y_G = \frac{4y_A - 3y_B}{4-3} = -3$$

donc

$$G(11,-3).$$

Coordonnées du barycentre de trois points pondérés

Propriété 35 Si *G est le barycentre des points pondérés (A,a); (B,b) et (C,c) alors les coordonnées de G sont :*

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C}{a+b+c} \\ \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C}{a+b+c} \end{cases}$$

Démonstration 36 *La démonstration est identique au cas de deux points.*

Exemple 37 .

Soit $A(1,1)$ *et* $B(2,5)$ *et* $C(-1,0)$ *les coordonnées du point* G *barycentre des points pondérés* $(A,2)$; $(B,-1)$ *et* $(C,4)$ *sont*

$$x_G = \frac{2x_A - x_B + 4x_C}{2-1+4} = \frac{-4}{5} \quad et \quad y_G = \frac{2y_A - y_B + 4y_C}{2-1+4} = \frac{-3}{5}$$

donc

$$G\left(\frac{-4}{5}, \frac{-3}{5}\right).$$

Coordonnées du barycentre de quatre points

Propriété 38 Si G *est le barycentre des points pondérés* (A, a); (B, b); (C, c) *et* (D, d) *alors les coordonnées de* G *sont* :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{ax_A + bx_B + cx_C + dx_D}{a + b + c + d} \\ \\ y_G = \dfrac{ay_A + by_B + cy_C + dy_D}{a + b + c + d} \end{cases}$$

Exemple 39 .

Soit $A(-2, 1)$ *et* $B(0, -3)$; $C(1, -1)$ *et* $D(-3, -2)$ *les coordonnées du point* G *barycentre des points pondérés* $\left(A, \dfrac{1}{2}\right)$; $(B, 2)$; $(C, 1)$ *et* $(D; -1, 5)$ *sont*

$$x_G = \frac{\frac{1}{2}x_A + 2x_B + x_C - 1,5x_D}{\frac{1}{2} + 2 + 1 - 1,5} = \frac{9}{4} \quad et \quad y_G = \frac{\frac{1}{2}y_A + 2y_B + y_C - 1,5y_D}{\frac{1}{2} + 2 + 1 - 1,5} = \frac{-7}{4}$$

donc

$$G\left(\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}\right).$$

Barycentre de n points

On peut généraliser la notion de barycentre à n points distincts.

- On appelle barycentre des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),...,(A_n, a_n) le point G défini par :

$$a_1\overrightarrow{GA_1} + a_2\overrightarrow{GA_2} + ... + a_n\overrightarrow{GA_n} = \overrightarrow{0} \quad \text{avec } a_1 + a_2 + ... + a_n \neq 0$$

- Si G est le barycentre des points pondérés (A_1, a_1), (A_2, a_2),...,(A_n, a_n) alors pour tout réel k non nul G est aussi le barycentre des points pondérés (A_1, ka_1), (A_2, ka_2),...,(A_n, ka_n) .

- Pour tout point M du plan.

$$a_1\overrightarrow{MA_1} + a_2\overrightarrow{MA_2} + ... + a_n\overrightarrow{MA_n} = (a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n)\overrightarrow{MG}$$

- Dans le cas d'un repère du plan, on obtient :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{a_1x_{A_1} + a_2x_{A_2} + ... + a_nx_{A_n}}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \\ \\ x_G = \dfrac{a_1y_{A_1} + a_2y_{A_2} + ... + a_ny_{A_n}}{a_1 + a_2 + ... + a_n} \end{cases}$$

FIN

www.etude – generale.com

Pr : **Yahya MATIOUI**