Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Généralités sur les fonctions

Ensemble de définition Représentation graphique d'une fonction

Ensemble de définition

Définition 1 .

L'ensemble de définition d'une fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est l'ensemble des nombres réels qui ont une image par f.

On note usuellement D_f cet ensemble et on écrit : $D_f = \{x \in \mathbb{R} \ / \ \ f(x) \in \mathbb{R}\}$.

Exemple 2 .

Déterminer l'ensemble de définition de chacune des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{2x}{x-1}\ ,\quad h(x) = \sqrt{x-1}\ ,\ g(x) = \frac{x^2+4}{x^2-1}\quad et\quad M(x) = \frac{1}{2x^2+x-3}$$

- *On a*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x \neq 1\} \\ &= \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc $D_f = \left]-\infty, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$.

- *On a*

$$\begin{aligned} D_h &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x-1 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x \geq 1\} \\ &= \left[1, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc $D_h = \left[1, +\infty\right[$.

- *On a*

$$\begin{aligned} D_g &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ \ x^2-1 \neq 0\right\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x-1 \neq 0 \ \ et\ \ x+1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ \ x \neq 1 \ \ et\ \ x \neq -1\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ &= \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[\end{aligned}$$

donc $D_g = \left]-\infty, -1\right[\cup \left]-1, 1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$

- *On a*

$$D_M = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 2x^2 + x - 3 \neq 0\right\}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation $2x^2 + x - 3 = 0$, le discriminant de l'équation $\Delta = 25$ donc les deux solutions de l'équation sont : $\dfrac{-3}{2}$ et 1, d'où

$$D_M = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{-3}{2}, 1\right\}$$

Remarque 3 .

♣ *Une fonction polynôme est définie sur $\mathbb{R}$.*

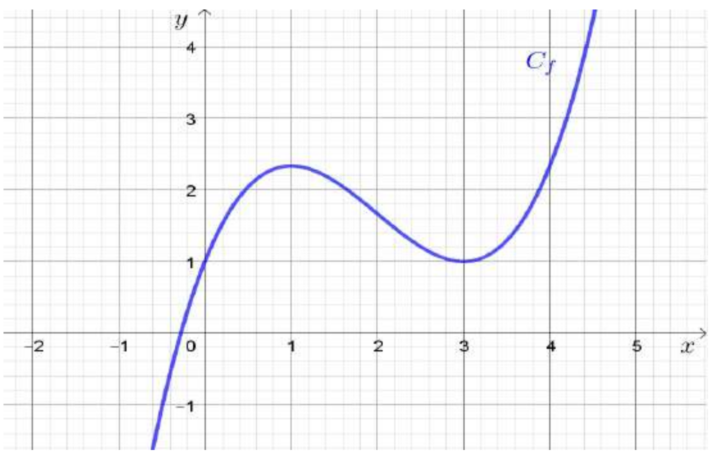
♣ *L'ensemble de définition des fonctions $x \longmapsto \cos x$ et $x \longmapsto \sin x$ est $\mathbb{R}$.*

♣ *La fonction $x \longmapsto \tan x$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.*

Représentation graphique d'une fonction

Définition 4 .

La courbe représentative d'une fonction f dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ est l'ensemble des points $M(x, f(x))$ où x parcourt le domaine de définition D_f de f, elle est souvent notée (C_f).



Remarque 5 .

La définition signifie :

$$M(x, y) \in (C_f) \quad \text{équivaut à} \ : \ y = f(x) \ \text{ et } x \in D$$

Fonction majorée - Fonction minorée - Fonction bornée

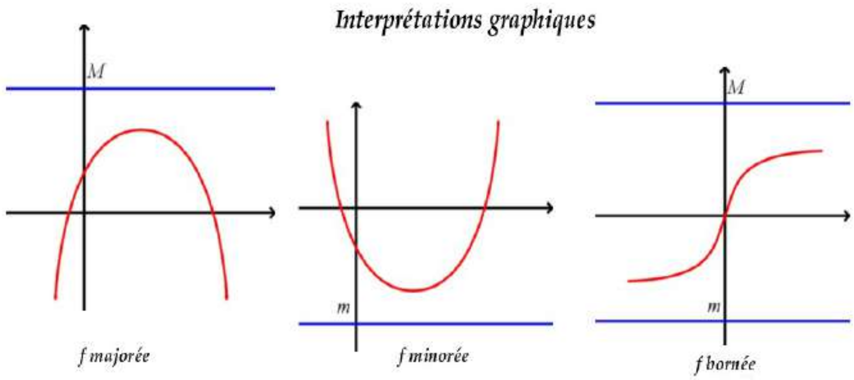
Définition 6 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle I. On dit que :

■ *f est majorée sur I : $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \ \ f(x) \leq M$,*

■ *f est minorée sur I :* $\exists m \in \mathbb{R}, \forall x \in I, \quad f(x) \geq m,$

■ *f est bornée sur I, s'il existe deux réels M et m tels que :* $m \leq f(x) \leq M.$



Remarque 7 .

On dit aussi que f est bornée sur I, si elle est à la fois majorée et minorée.

Exemple 8 .

On considère f la fonction numérique définie par : $f(x) = -2x^2 + 4x + 1$

Montrer que la fonction f est majorée par 3.

On montre que : $(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) \leq 3.$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x) - 3 &= -2x^2 + 4x + 1 - 3 \\ &= -2x^2 + 4x - 2 \\ &= -2\left(x^2 - 2x + 1\right) \\ &= -2(x-1)^2 \leq 0 \end{aligned}$$

et comme $-2(x-1)^2 \leq 0$ alors $f(x) - 3 \leq 0$ donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) \leq 3.$$

D'où la fonction f est majorée par 3 sur $\mathbb{R}$.

Exemple 9 .

On considère f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{x^2 + 4x + 1}{x^2 + 1}$

Montrer que la fonction f est minorée par -1.

On montrer que : $(\forall x \in D_f), f(x) \geq -1.$

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \quad \underbrace{x^2 + 1 \neq 0}_{toujours\ vérifiée} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} f(x)+1 &= \frac{x^2+4x+1}{x^2+1}+1 \\ &= \frac{x^2+4x+1+x^2+1}{x^2+1} \\ &= \frac{2x^2+4x+2}{x^2+1} \\ &= \frac{2\left(x^2+2x+1\right)}{x^2+1} \\ &= \frac{2\left(x+1\right)^2}{x^2+1} \end{aligned}$$

et comme $\dfrac{2\left(x+1\right)^2}{x^2+1} \geq 0$ *alors* $f(x)+1 \geq 0$ *donc*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), \quad f(x) \geq -1.$$

D'où la fonction f est minorée par -1 sur $\mathbb{R}$.

Exemple 10 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x-x^2}{x^2+1}$.

1. *Montrer que :* $\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), \ \dfrac{|x|}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$.
2. *Montrer que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

♣ *Soit $x \in \mathbb{R}$, on a*

$$\frac{|x|}{x^2+1} - \frac{1}{2} = \frac{2|x|-x^2-1}{x^2+1} = \frac{-\left(x^2-2|x|+1\right)}{x^2+1} = \frac{-\left(|x|-1\right)^2}{x^2+1}$$

et comme $-\left(|x|-1\right)^2 \leq 0$ *alors* $\dfrac{-\left(|x|-1\right)^2}{x^2+1} \leq 0$ *donc* $\dfrac{|x|}{x^2+1} - \dfrac{1}{2} \leq 0$. *D'où*

$$\left(\forall x \in \mathbb{R}\right), \ \frac{|x|}{x^2+1} \leq \frac{1}{2}.$$

♣ *Montrons que f est bornée sur $\mathbb{R}$.*

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(x) = \frac{x-x^2}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{x^2}{x^2+1}$$

or $0 \leq x^2 < x^2+1$ *alors* $0 \leq \dfrac{x^2}{x^2+1} < 1$ *donc* $-1 < -\dfrac{x^2}{x^2+1} \leq 0$. (♠)

On a $\dfrac{|x|}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ *c'est-à-dire* $\dfrac{-1}{2} \leq \dfrac{x}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ $(\spadesuit\spadesuit)$

de $(\spadesuit)$ *et* $(\spadesuit\spadesuit)$ *on déduit que :* $\dfrac{-3}{2} < \dfrac{x}{x^2+1} - \dfrac{x^2}{x^2+1} \leq \dfrac{1}{2}$ *donc*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ \frac{-3}{2} < f(x) \leq \frac{1}{2}$$

D'où f *est bornée sur* $\mathbb{R}$.

Fonction périodique

Définition 11 .
Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ *et soit* $T \in]0, +\infty[$. *On dit que* T *est une période pour* f *si :*

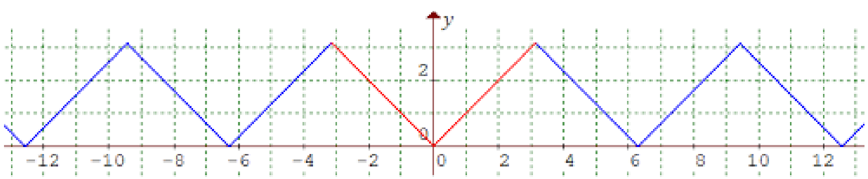
$$\text{pour tout } x \in D_f, \quad (x+T) \in D_f \quad \text{ et } \quad f(x+T) = f(x).$$

Exemple 12 .

♣ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a :* $(x+2\pi) \in \mathbb{R}$ *et* $\sin(x+2\pi) = \sin x$. *Donc la fonction* $\sin$ *est périodique de période* 2π.

♣ π *est une période de la fonction* $x \longmapsto \tan x$.

Remarque 13 .
Pour étudier une fonction périodique de période T *il suffit de l'étudier sur un intervalle de longueur* T.



Exemple 14 *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = \dfrac{1}{2}\sin(2x) - \cos x$
Montrons que 2π *est une période de* f :

■ *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *on a* $x + 2\pi \in \mathbb{R}$. (1)

■ *Soit* $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= \frac{1}{2}\sin(2(x+2\pi)) - \cos(x+2\pi) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x+4\pi) - \cos(x) \\ &= \frac{1}{2}\sin(2x) - \cos(x) = f(x) \qquad (2) \end{aligned}$$

D'après (1) *et* (2) *on en déduit que* 2π *est une période de* f.

Propriété 15 .
Si T *est une période d'une fonction* f, *alors pour tout entier* k *de* $\mathbb{Z}$, *on a*

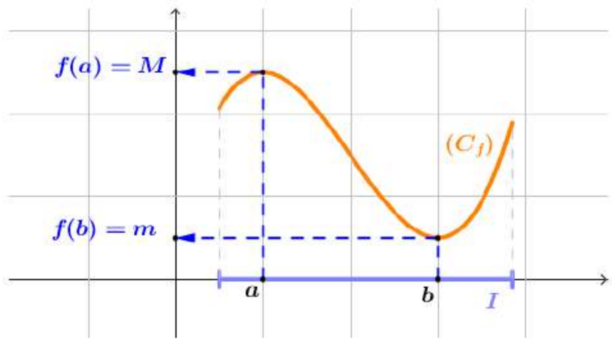
$$(\forall x \in D_f), \quad f(x+kT) = f(x)$$

Extremum d'une fonction

Définition 16 .

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I et a un élément de I.

1. *On dit que $f(a)$ est une valeur maximale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \leq f(a)$ pour tout $x \in I$.*



2. *On dit que $f(b)$ est une valeur minimale de la fonction f sur l'intervalle I si, et seulement si $f(x) \geq f(b)$ pour tout $x \in I$.*

Remarque 17 *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

Exemple 18 .

On considère la fonction f définie sur $I = [-7, 3]$ dont le tableau de variation est le suivant :

x	-7	-4	0	3
f	-5 ↗	4 ↘	-4 ↗	5

♣ -5 *est une valeur minimale absolue de f sur I atteinte en $x = 7$.*

♣ 5 *est une valeur maximale absolue de f sur I atteinte en $x = 3$.*

♣ 4 *est une valeur maximale locale de f sur I atteinte en $x = -4$.*

♣ -4 *est une valeur minimale locale de f sur I atteinte en $x = 0$.*

Exemple 19 .

On considère f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2 + 3}{x^2 + 1}$

Montrer que la fonction f est minorée par 2, est-ce-que 2 est une valeur minimale de la fonction f.

■ *Montrons que :* $(\forall x \in D_f)\,,\ f(x) \geq 2$.

On a : $D_f = \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) - 2 &= \frac{2x^2+3}{x^2+1} - 2 \\ &= \frac{2x^2+3-2x^2-2}{x^2+1} \\ &= \frac{1}{x^2+1} \geq 0 \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,, \quad f(x) \geq 2.$$

■ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = 2$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$f(x) = 2 \iff \frac{2x^2+3}{x^2+1} = 2 \iff 2x^2+3 = 2x^2+2 \iff 3 = 2 \quad (\textit{impossible})$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,, \quad f(x) \neq 2$$

D'où 2 *n'est pas une valeur minimale de la fonction* f.

Comparaison de deux fonctions, Interprétation géométrique

Égalité de deux fonctions

Définition 20 .

Soient f *et* g *deux fonctions numériques.*
On dit que f *et* g *sont égales si et seulement si :*

♣ *elles ont le même ensemble de définition :* $D_f = D_g$

♣ *Pour tout réel* x *de cet ensemble de définition :* $f(x) = g(x)$.

Exemple 21 .

On considère les deux fonctions numériques f *et* g *définies par :*

$$f(x) = |x+2| \qquad \textit{et} \qquad g(x) = \sqrt{x^2+4x+4}$$

Est-ce-que les fonctions f *et* g *sont égales ?*
On a $D_f = \mathbb{R}$.
On a

$$D_g = \left\{x \in \mathbb{R} \;/\;\; x^2+4x+4 \geq 0\right\}$$

comme : $x^2+4x+4 = (x+2)^2 \geq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *donc* $D_g = \mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$g(x) = \sqrt{x^2+4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} = |x+2| = f(x)$$

d'où : $f = g$ *sur* $\mathbb{R}$.

Comparaison de deux fonctions

Définition 22 .

Soient f et g deux fonctions définies sur un intervalle I.

On dit que f est supérieure ou égale à g sur I, et on note $f \geq g$ si $f(x) \geq g(x)$ pour tout $x \in I$.

Interprétation géométrique

Soient f et g deux fonctions définies sur I.

(C_f) et (C_g) les courbes représentatives de f et g dans un repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$

Relation algébrique	Interprétation géométrique
$f(x) = g(x)$	La courbe (C_f) coupe la courbe (C_g)
$f(x) \geq g(x)$	La courbe (C_f) est au dessus de (C_g)
$f(x) \leq g(x)$	La courbe (C_f) est en dessous de (C_g)
$f(x) = 0$	La courbe (C_f) coupe l'axe des abscisses
$f(x) \geq 0$	La courbe (C_f) est au dessus de l'axe des abscisses
$f(x) = a \ / \ a \in \mathbb{R}^*$	La courbe (C_f) coupe la droite d'équation $y = a$

Exemple 23 .

Soient f et g deux fonctions défnies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 + 4$ et $g(x) = 4x$.

Comparons : f et g sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

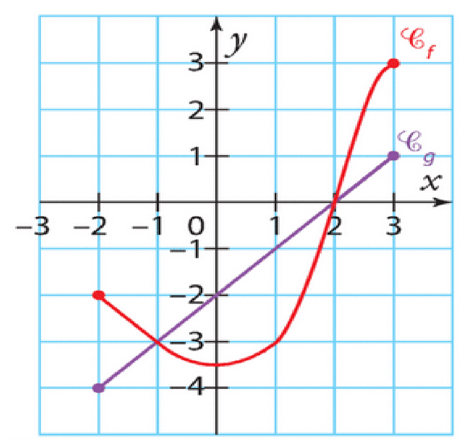
$$f(x) - g(x) = \left(x^2 + 4\right) - 4x = (x-2)^2$$

comme $(x-2)^2 \geq 0$ alors $f(x) - g(x) \geq 0$ d'où

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ f(x) \geq g(x)$$

Exemple 24 .

On considère la représentation graphique suivante :



♣ *Résoudre graphiquement : $f(x) \leq 0$ signifie que la courbe (C_f) est en dessous de l'axe des abscisses, d'où*

$$S = [-2, 2]$$

♣ *Résoudre graphiquement :* $g(x) \geq f(x)$ *signifie que la courbe* (C_f) *et au dessous de la courbe* (C_g) *sur* $\mathbb{R}$, *d'où*

$$S = [-1, 2]$$

Exemple 25 .

Soit f *et* g *les fonctions définies sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^2 - 3x + 5$ *et* $g(x) = -x^2 + 2x + 2$.
Comparer f *et* g *sur* $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) - g(x) &= x^2 - 3x + 5 - \left(-x^2 + 2x + 2\right) \\ &= 2x^2 - 5x + 3 \end{aligned}$$

et comme $\Delta = 1$*donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes :* 1 *et* $\frac{3}{2}$, *et* $a > 0$ $(a = 1)$

x	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2x2-5x+3$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)-g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc

$$f(x) \geq g(x) \iff x \in]-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$$

$$f(x) \leq g(x) \iff x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

D'où $f \leq g$ *sur* $]-\infty, 1] \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right[$ *et* $f \geq g$ *sur* $\left[1, \frac{3}{2}\right]$.

Opérations sur les fonctions

Somme, produit et quotient de deux fonctions

Définition 26 .

Soient f *et* g *deux fonctions sur un ensemble* D.

♣ *La somme des fonctions* f *et* g *est la fonction* $f + g$ *définie sur* D *par :* $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$.

♣ *Le produit des fonctions* f *et* g *est la fonction* $f \times g$ *définie sur* D *par :* $(f \times g)(x) = f(x) \times g(x)$

♣ *Le quotient des fonctions* f *et* g *est la fonction* $\frac{f}{g}$ *définie sur* D *par :* $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ *avec* $g(x) \neq 0$.

Composée de deux fonctions

Activité

Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que : $f(x) = x + 3$ et $g(x) = 2x - 5$.

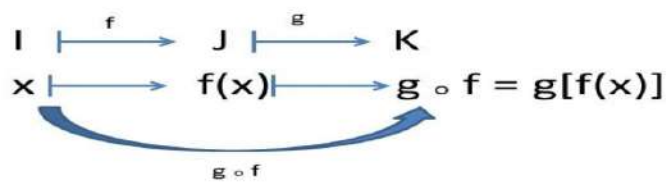
1. Calculer $f(1)$.
2. Calculer $g(f(1))$.

Vocabulaire - Notation

♣ La fonction $h : x \longmapsto h(x) = g(f(x))$ on la note par $h = g \circ f$ d'où $h(x) = (g \circ f)(x) = g(f(x))$.

♣ La fonction $g \circ f$ est appelée fonction composée de f suivie de g

♣ On peut faire le diagramme suivant pour $g \circ f$:



Définition 27 *Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur D_f et D_g et $f(D_f) \subset D_g$.*

On pose : $D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\}$. La fonction h définie sur $D_{g\circ f}$ par $h(x) = g(f(x))$ est appelée fonction composée de f suivie de g . On note $h = g \circ f$ (se lt g rond f).

Remarque 28 .

$$D_{g\circ f} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\} \quad \text{et} \quad D_{f\circ g} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_g \text{ et } g(x) \in D_f\}$$

Exemple 29 .

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$g(x) = \frac{x^2}{x^2+1} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}}$$

Déterminer $g \circ f$.
On détermine $D_{g\circ f}$:
On a : $D_g = \mathbb{R}$ et $D_f =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$.
D'autre part on a

$$\begin{aligned} D_{g\circ f} &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \in D_f \text{ et } f(x) \in D_g\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \ x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\text{ et } \frac{1}{\sqrt{x^2 - x}} \in \mathbb{R}\right\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[. \end{aligned}$$

Soit $x \in D_{g\circ f}$, on a

$$\begin{aligned}
(g\circ f)(x) &= g(f(x)) \\
&= \frac{(f(x))^2}{(f(x))^2+1} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2}{\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2-x}}\right)^2+1} \\
&= \frac{\dfrac{1}{x^2-x}}{\dfrac{1}{x^2-x}+1} \\
&= \frac{1}{x^2-x+1}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_{g\circ f}), \qquad (g\circ f)(x) = \frac{1}{x^2-x+1}.$$

Exemple 30 .

On considère les deux fonctions f et g définies par :

$$g(x) = \frac{x-1}{x-2} \quad et \quad f(x) = x^2 - x$$

Déterminer $f\circ g$.

On détermine $D_{f\circ g}$:

On a : $D_g = \mathbb{R}\setminus\{2\}$ et $D_f = \mathbb{R}$.

D'autre part on a

$$\begin{aligned}
D_{f\circ g} &= \{x\in\mathbb{R} /\ x\in D_g \text{ et } g(x)\in D_f\} \\
&= \left\{x\in\mathbb{R}/\ x\in\mathbb{R}\setminus\{2\} \text{ et } \frac{x-1}{x-2}\in\mathbb{R}\right\} \\
&= \mathbb{R}\setminus\{2\}.
\end{aligned}$$

Soit $x \in D_{f\circ g}$, on a

$$\begin{aligned}
(f\circ g)(x) &= f(g(x)) \\
&= (g(x))^2 - g(x) \\
&= \left(\frac{x-1}{x-2}\right)^2 - \frac{x-1}{x-2} \\
&= \frac{x-1}{(x-2)^2}
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_{f\circ g}), \qquad (f\circ g)(x) = .\frac{x-1}{(x-2)^2}$$

Remarque 31 *La composée de deux fonctions n'est pas commutative c'est-à-dire : $g\circ f \neq f\circ g$.*

Monotonie d'une fonction

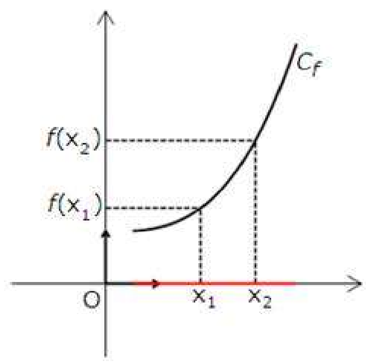
Sens de variations d'une fonction (Rappels)

Définition 32 .

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I inclus dans son ensemble de définition.

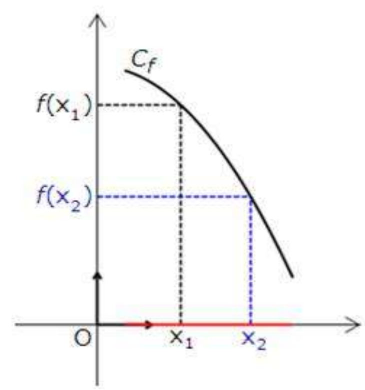
- f *est strictement croissante sur l'intervalle* I *si et seulement si* :

$$\left(\forall\,(x,y)\in I^2\right),\qquad (x<y\implies f\,(x)<f\,(y))$$



- f *est strictement décroissante sur l'intervalle* I *si et seulement si* :

$$\left(\forall\,(x,y)\in I^2\right),\qquad (x<y\implies f\,(x)>f\,(y))$$



- f *est constante sur l'intervalle* I *si et seulement si* :

$$\left(\forall\,(x,y)\in I^2\right),\qquad f\,(x)=f\,(y)$$

Exemple 33 .

Soit f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ *par* : $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$.

Étudier la monotonie de la fonction f *sur les intervalles* $]-1,+\infty[$ *et* $]-\infty,-1[$.

♣ *Soit a et b deux éléments de $]-1,+\infty[$ tels que : $a<b$.*

On a $a<b$ alors $a+1<b+1$ et comme $a+1>0$ donc $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$ c'est-à-dire $f(a)>f(b)$. D'où la fonction f est strictement décroissante sur $]-1,+\infty[$.

♣ *Soit a et b deux éléments de $]-\infty,-1[$ tels que : $a<b$.*

On a $a<b$ alors $a+1<b+1$ et comme $a+1>0$ donc $\dfrac{1}{a+1}>\dfrac{1}{b+1}$ c'est-à-dire $f(a)>f(b)$. D'où la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1[$.

Propriété 34 .

Soit f une fonction numérique définie sur l'intervalle I. pour tous x et y deux éléments ***distincts*** *de I. Le taux de variation de la fonction f entre x et y est : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.*

- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\geq 0$ alors f est croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}>0$ alors f est strictement croissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}\leq 0$ alors f est décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}<0$ alors f est strictement décroissante sur I.*
- *Si pour tous x et y deux éléments de I on a : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=0$ alors f est constante sur I.*

Exemple 35 .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$f(x)=x+\frac{4}{x}$$

1. *Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$. Montrer que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-4}{xy}$.*
2. *Étudier la monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2,+\infty[$ et $]0,2]$.*

♣ *Montrons que : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}=\dfrac{xy-4}{xy}$.*

Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^*$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{x+\frac{4}{x}-\left(x+\frac{4}{x}\right)}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\frac{4}{x}-\frac{4}{y}}{x-y} \\
&= \frac{x-y+\frac{4y-4x}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{\frac{xy\,(x-y)+4\,(y-x)}{xy}}{x-y} \\
&= \frac{xy\,(x-y)-4\,(x-y)}{xy\,(x-y)} \\
&= \frac{(x-y)\,(xy-4)}{xy\,(x-y)} \\
&= \frac{xy-4}{xy}
\end{aligned}$$

♣ *La monotonie de la fonction f sur les intervalles $[2,+\infty[$ et $]0,2]$.*

♠ *Soit x et y deux éléments de $[2,+\infty[$ tels que : $x \neq y$.*
On a : $x \geq 2$ et $y \geq 2$ alors $xy \geq 4$ et comme $x \neq y$ donc $xy > 4$ d'où $xy-4>0$, et comme $xy>0$. Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \text{où } x,y \in [2,+\infty[\ \text{ et } x \neq y$$

Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[2,+\infty[$.

♠ *Soit x et y deux éléments de $]0,2]$ tels que : $x \neq y$.*
On a : $0 < x \leq 2$ et $0 < y \leq 2$ alors $0 < xy \leq 4$ et comme $x \neq y$ donc $0 < xy < 4$ d'où $-4 < xy-4 < 0$, et comme $xy > 0$. Donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \quad \text{où } x,y \in]0,2] \ \text{ et } x \neq y$$

Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $]0,2]$.

Représentation graphique des fonctions de références

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^2+bx+c$,$(a \neq 0)$.

Soient a, b et c des réels tels que $a \neq 0$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = ax^2+bx+c$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Définition 36 *Une fonction polynôme de degré 2 est une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :* $f(x) = ax^2 + bx + c$ *avec a, b et c des réels et $a \neq 0$.*

Variations

Propriété 37 .

- Si $a > 0$, *alors la fonction f est strictement croissante sur* $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ *et strictement décroissante sur* $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.
- Si $a < 0$, *alors la fonction f est strictement décroissante sur* $\left[\frac{-b}{2a}, +\infty\right[$ *et strictement croissante sur* $\left]-\infty, \frac{-b}{2a}\right]$.

Démonstration 38 *Admis*

Conclusion 39 .

1er cas Si $a > 0$.

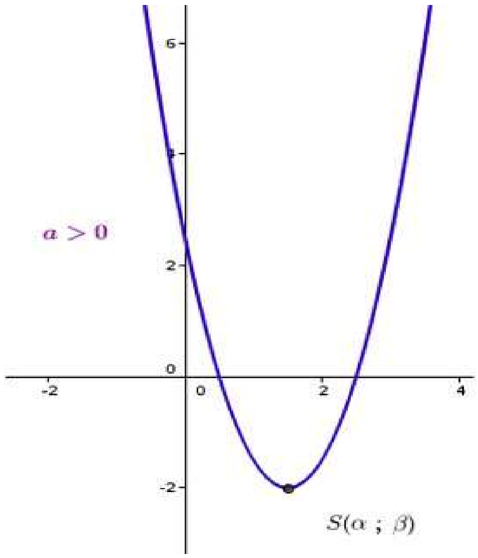
x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\searrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\nearrow$	

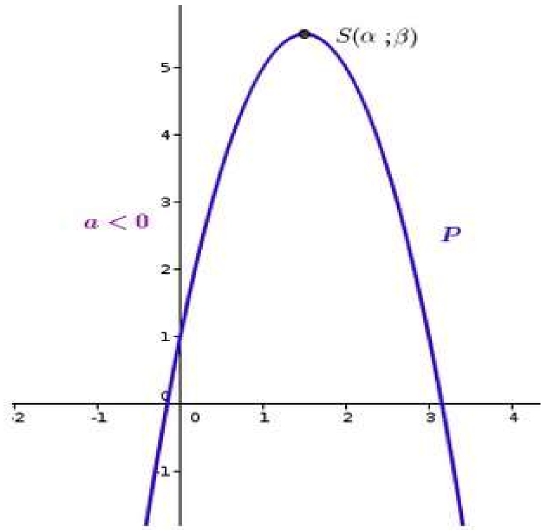
2ème cas Si $a < 0$.

x	$-\infty$		$\frac{-b}{2a}$		$+\infty$
f		$\nearrow$	$f(\frac{-b}{2a})$	$\searrow$	

Représentation graphique de la fonction f.

La courbe représentative de la fonction f est appelée parabole de sommet $\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$ et a pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \frac{-b}{2a}$.





Exemple 40 .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = x^2 - 2x - 3$$

1. *Déterminer le tableau de variations de la fonction f.*
2. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{cx+d}$ avec a, b, c et d des réels et $c \neq 0$.

On considère la fonction définie par :

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Définition 41 .

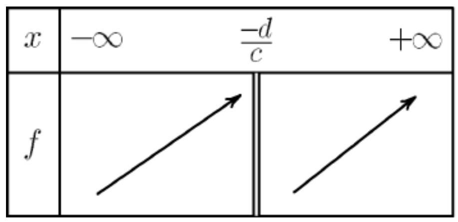
On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ où a, b et $c \neq 0$ et d sont des réels tels que $ad - bc \neq 0$.

- **L'ensemble de définition de la fonction** f.

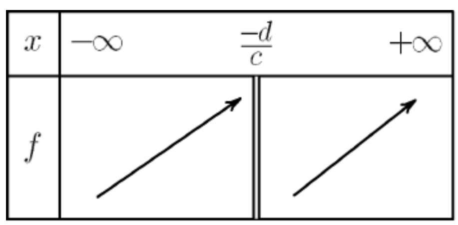
$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R}/\ cx + d \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ cx \neq -d\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq \frac{-d}{c}\right\} \\ &= \left]-\infty, \frac{-d}{c}\right[\cup \left]\frac{-d}{c}, +\infty\right[\end{aligned}$$

- **Variations de la fonction** f.

  – 1er cas. Si : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc > 0.$

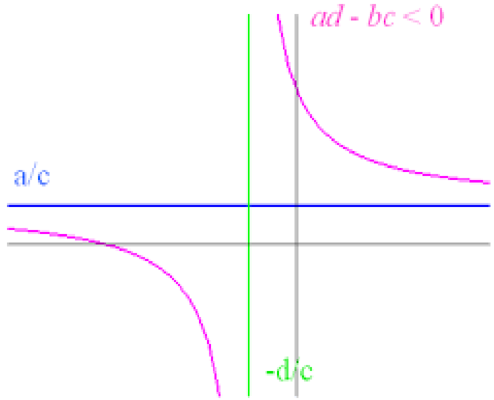


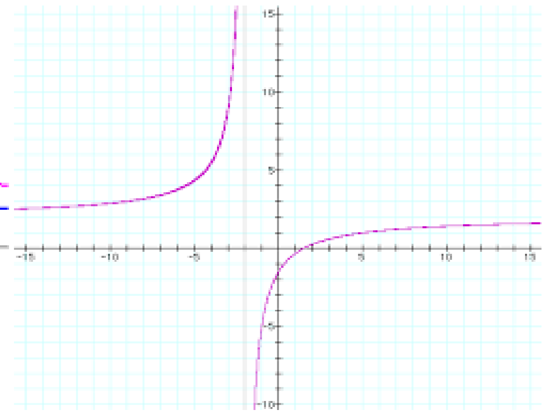
  – 2ème cas. Si : $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc < 0.$



- **Représentation graphique de la fonction** f.

  La courbe représentative de la fonction f est appelée hyperbole et le point $\left(\frac{-d}{c}, \frac{a}{c}\right)$, son centre de symétrie,et les droites d'équations : $x = \frac{-d}{c}$ et $y = \frac{a}{c}$ sont ses deux asymptotes.





Exemple 42 .

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{x+2}{x-1}$$

1. *Déterminer D_f.*
2. *Donner le tableau de variation de la fonction f.*
3. *Tracer la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.*

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto \sqrt{x+a}$ où a est un réel

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x+a}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

- La fonction f est définie sur $[-a, +\infty[$.
- Variations de f :

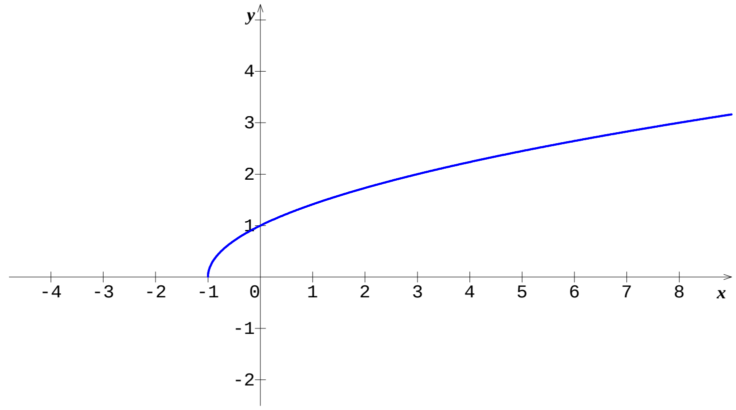
  Soient x et y deux éléments de $[-a, +\infty[$ tels que : $x < y$.

  $$x < y \implies x + a < a + y \implies \sqrt{x+a} < \sqrt{y+a} \implies f(x) < f(y)$$

  Donc la fonction f est strictement croissante sur $[-a, +\infty[$.
- Le tableau de variation de f :

x	$-a$		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

- Courbe représentative : sur la figure on représente la courbe de f dans le cas $a = -1$.



Exemple 43 .

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sqrt{x-2}.$$

1. *Déterminer D_f.*
2. *Dresser le tableau de variation de f.*
3. *Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.*

Étude et représentation graphique de la fonction $x \longmapsto ax^3$ où a est un réel non nul

Soit f la fonction définie par : $f(x) = ax^3$ où $a \neq 0$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

♣ Ensemble de définition : $D_f = \mathbb{R}$.

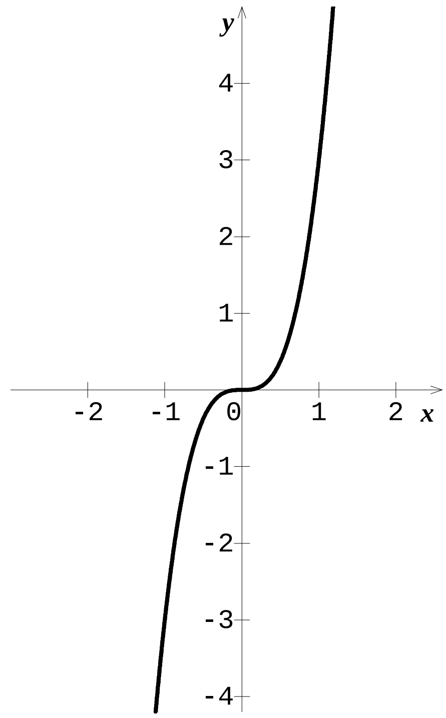
♣ La fonction f est impaire.

♣ Variations de f.

Si $a > 0$, alors f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		$+\infty$
f		$\nearrow$	

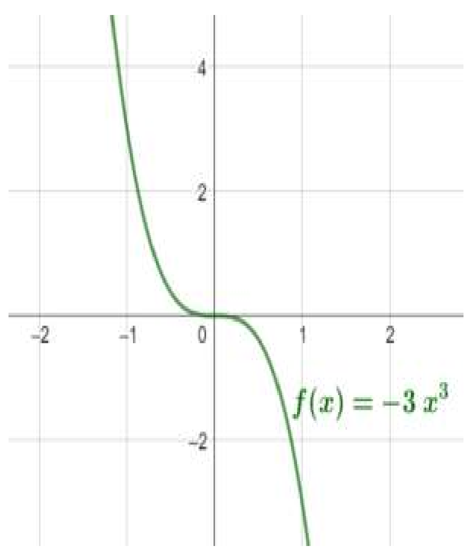
Courbe de f $(a > 0)$



Si $a < 0$, alors f est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$

x	$-\infty$	$+\infty$
f	$\searrow$	

Courbe de f : $(a < 0)$



Exemple 44 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^3$.

1. *Montrer que la fonction f est impaire.*
2. *Dresser le tableau de variation de f.*
3. *Tracer la courbe (C_f) dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.*

Montonie de la composée de deux fonctions monotones

Propriété 45 .

Soient f et g deux fonctions définies respectivement sur I et J telles que $f(I) \subset J$.

- Si f *et* g *ont* ***même*** *monotonie (strictement monotone) respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est croissante sur I ($g \circ f$ est strictement croissante sur I).*
- Si f *et* g *ont monotonie (strictement monotone)* ***opposées*** *respectivement sur I et J alors $g \circ f$ est décroissante sur I ($g \circ f$ est strictement décroissante sur I).*

Exemple 46 .

Soient f et g deux fonctions définies par :

$$f(x) = \sqrt{x+2} \quad et \quad g(x) = \frac{x-3}{x+3}$$

1. *Déterminer D_f et D_g.*
2. *Soit h la fonction numérique définie sur $[-2, +\infty[$ par : $h(x) = \dfrac{\sqrt{x+2}-3}{\sqrt{x+2}+3}$*

   Déterminer la monotonie de h sur $[-2, +\infty[$.

- *L'ensemble de définition de la fonction f.*

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / \ x+2 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \geq -2\} \\ &= [-2, +\infty[. \end{aligned}$$

- *L'ensemble de définition de la fonction g.*

$$\begin{aligned} D_g &= \{x \in \mathbb{R} / \ x+3 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq -3\} \\ &=]-\infty, -3[\cup]-3, +\infty[. \end{aligned}$$

■ *On détermine la mnotonie de h sur $[-2,+\infty[$.*

On a

$$(\forall x \in [-2,+\infty[)\,, \quad h(x) = (g \circ f)(x)\,.$$

La fonction f est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$, et on a

x	-2		$+\infty$
f	0	$\nearrow$	

par suite $f([-2,+\infty[) \subset [0,+\infty[$, et comme g est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, alors h est strictement croissante sur $[-2,+\infty[$.

Exemple 47 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \dfrac{2x^2+4x+3}{x^2+2x+2}$
Soient f et g deux fonctions définies par :

$$v(x) = \frac{2x+3}{x+2} \quad et \quad u(x) = x^2 + 2x$$

1. *Dresser le tableau de variation de u et v.*
2. *Déterminer la monotonie de la fonction f sur $[-1,+\infty[$ et sur $]-\infty,-1]$.*

■ *On a : $u(x) = x^2 + 2x$ et $\dfrac{-b}{2a} = -1$ et $a > 0$ alors*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
u		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

■ *On a : $v(x) = \dfrac{2x+3}{x+2}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0.$*

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
v		$\nearrow$	$\|\|$	$\nearrow$	

- *La monotonie de f sur $[-1,+\infty[$.*

  On a

  $$f = v \circ u$$

  La fonction u est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$,par suite $u\left([-1,+\infty[\right) \subset [-1,+\infty[$ et comme v est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, alors f est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$.

- *La monotonie de f sur $]-\infty,-1]$.*

  La fonction u est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$,par suite $u\left(]-\infty,-1]\right) \subset [-1,+\infty[$ et comme v est strictement croissante sur $[-1,+\infty[$, alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,-1]$.

Donc

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	1	$\nearrow$	

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com