Calcul vectoriel dans le plan

Vecteur du plan : Rappel

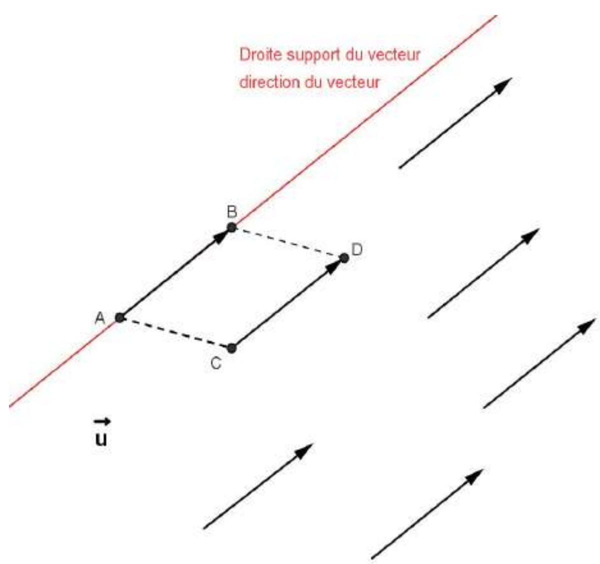
Définition 1 .

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ *est un objet mathématique qui se définit par :*

- *Une direction (celle de la droite dans laquelle est inclus le vecteur)*
- *Un sens (orientation de la flèche)*
- *Une norme : longueur du vecteur notée :* $\|\overrightarrow{u}\|$

Remarque 2 :

- *Un vecteur n'a pas de point d'application. On peut donc placer où l'on veut dans le plan euclidien. En cela il se différentie de la force en physique qui a un point d'application.*
- *Les trois caractéristiques d'un vecteur (direction, sens, norme) ne permettent pas de lui donner une position. Lorsqu'on « trace » un vecteur, on n'en donne en fait qu'un représentant.*

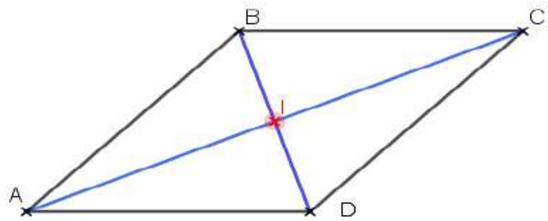


- *Pour fixer un représentant particulier du vecteur* $\overrightarrow{u}$*, on peut prendre deux points* A *et* B *du plan. On note alors ce représentant :* $\overrightarrow{AB}$.

Vecteurs égaux

Définition 3 *Deux vecteurs sont égaux s'ils ont même direction, même sens et même norme.*

Propriété 4 *Soient A , B , C et D quatre points non alignés du plan. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme.*

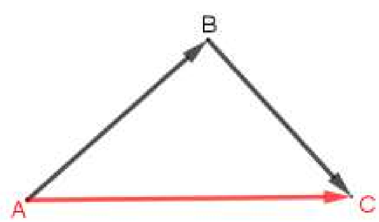


Remarque 5 *On peut donc associer un parallélogramme à l'égalité de deux de deux vecteurs, ce qui simplifie la démonstration pour prouver qu'un quadrilatère est un parallélogramme.*

Addition vectorielle

Propriété 6 (*Relation de Chasles*)
Soient A et C deux points du plan. Pour tout point B du plan, on a :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$



$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$

Exemple 7 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CA} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA} \\
&= \overrightarrow{AA} \\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

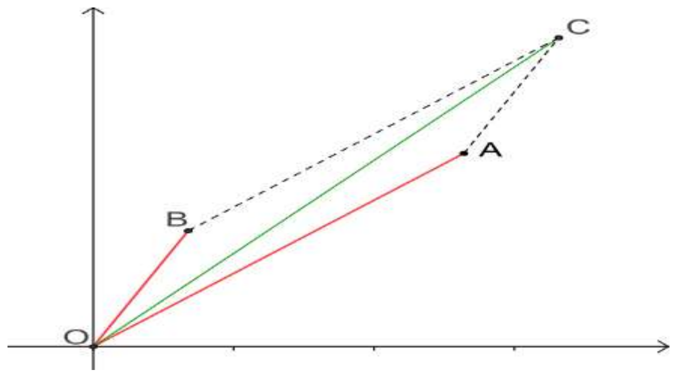
Remarque 8 *Cette addition de deux vecteurs ne s'applique pas à la norme, en effet :*

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \neq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\| \quad \textit{mais} \quad \|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

Propriété 9 (*règle du parallélogramme*)

O, A et B trois points non alignés.

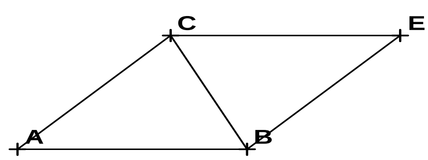
La somme des vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ est le vecteur $\overrightarrow{OC}$ tel que le quadrilatère $OACB$ est un parallélogramme.



Exemple 10 *A, B et C trois points non alignés.*

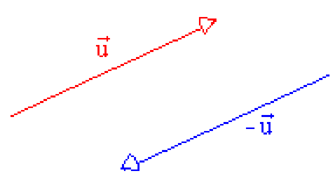
Construire le point E tel que : $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

Comme $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ alors $[AE]$ est le diamètre du parallélogramme $ABEC$.



Définition 11 (*vecteurs opposés*)

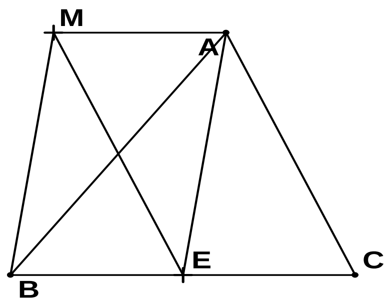
Deux vecteurs sont dits opposés s'ils ont la même direction, la même norme mais qu'ils sont de sens contraire.



Remarque 12 $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$

Exemple 13 *ABC est un triangle et E est le milieu du segment $[BC]$. On considère le point M, tel que : $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$. Montrer que les quadrilatères $ACEM$ et $AEBM$ sont des parallélogrammes.*

•



On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CM} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE} \\ \text{éq} &: \overrightarrow{CM} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} \\ \text{éq} &: -\overrightarrow{MC} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CE} \\ \text{éq} &: -\left(\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CA}\right) = \overrightarrow{CE} \\ \text{éq} &: -\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{CE} \\ \text{éq} &: \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{CE} \end{aligned}$$

donc le quadrilatère $ACEM$ est un parallélogramme.

- *On a E est le milieu du segment $[BC]$, donc : $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{EC}$ et comme $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{MA}$ d'où le quadrilatère $AEBM$ est un parallélogramme.*

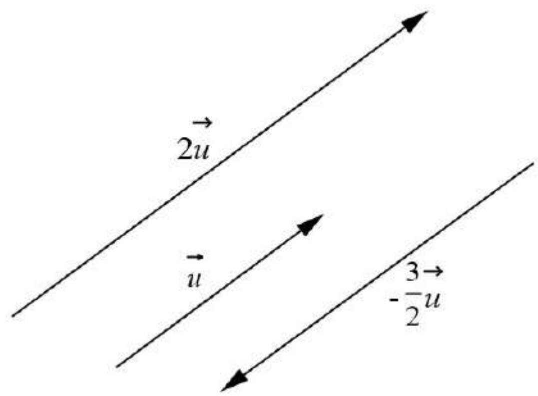
Produit d'un vecteur par un réel

Définition et propriétés

Définition 14 *Soit un vecteur $\overrightarrow{u}$ et un réel k.*
On définit le produit $k\overrightarrow{u}$ du scalaire k par le vecteur $\overrightarrow{u}$ par :

- *Si $k > 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ a la même direction et même sens que $\overrightarrow{u}$ et sa longueur est multiplier par k. On a alors : $\|k\overrightarrow{u}\| = k \times \|\overrightarrow{u}\|$.*
- *Si $k < 0$, alors $k\overrightarrow{u}$ a la même direction et un sens contraire à $\overrightarrow{u}$ et sa longueur est multiplier par $-k$. On a alors : $\|k\overrightarrow{u}\| = -k \times \|\overrightarrow{u}\|$.*
- *Si $k = 0$, on a : $0\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$.*

Exemple 15 *On a les vecteurs suivants :*



Propriété 16 .

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs et pour tous réels k et k'. On a :

- $(k+k')\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u} + k'\overrightarrow{u}$
- $k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u} + k\overrightarrow{v}$
- $k(k'\overrightarrow{u}) = (kk')\overrightarrow{u}$
- $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ *éq* : $k = 0$ *ou* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$

Exemple 17 *A et B sont deux points tels que : $AB = 6cm$. Placer les points M et N définis par les relations suivantes :*

$$2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{0} \quad et \quad 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{0}$$

Astuce. *Pour placer les points M et N, on exprime les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ à l'aide du vecteur $\overrightarrow{AB}$.*

- *Pour le point M.*

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM} &= \overrightarrow{0} \;\; éq : 2\overrightarrow{AM} + \left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM}\right) = \overrightarrow{0} \\ éq &: \;\; 3\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ éq &: \;\; \overrightarrow{AM} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

- *Pour le point N.*

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NB} &= \overrightarrow{0} \iff 2\overrightarrow{NA} - 5\left(\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB}\right) = \overrightarrow{0} \\ éq &: \;\; 2\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ éq &: \;\; -3\overrightarrow{NA} - 5\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \\ éq &: \;\; 3\overrightarrow{AN} = 5\overrightarrow{AB} \\ éq &: \;\; \overrightarrow{AN} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB} \end{aligned}$$

On obtient la figure suivante :

Colinéarité de deux vecteurs

Définition 18 *Deux vecteurs* $\overrightarrow{u}$ *et* $\overrightarrow{v}$ *sont colinéaires s'il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$.

Remarque 19 *Cela découle directement de la définition du produit d'un vecteur par un scalaire.*

Exemple 20 A, B, C *et* D *quatre points du plan tels que :* $5\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$.
Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*

- *Les vecteurs* $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires s'il existe un réel* k *tel que* $\overrightarrow{BD} = k\overrightarrow{BC}$.

  On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BD} &= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{BA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\
&= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{-2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{2}{5}\left(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{2}{5}\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) \\
&= \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

  donc que les vecteurs $\overrightarrow{BD}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *sont colinéaires.*

Propriété 21 (*Parallélisme et alignement*)

- *Deux droites* (AB) *et* (CD) *sont parallèles si, et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{CD}$ *sont colinéaires.*
- *Les point* A, B *et* C *sont alignés si, et seulement si les vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$ *sont colinéaires.*

Exemple 22 A, B *et* C *trois points du plan tels que :* $\overrightarrow{AB} = 4\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{CB}$.

1. *Montrer que :* $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$.
2. *Que peut-on conclure ?*

- *En utilisant la relation de chaslses, on a :*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\
&= 4\overrightarrow{AC} + 5\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BC} \\
&= 4\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{BC} \\
&= 4\left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC}\right) \\
&= 4\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}\right) \\
&= 4\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

- *Comme* $\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{AB}$*, alors les vecteurs* $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires. Ceci signifie que les points* A*,* B *et* C *sont alignés.*

Exemple 23 *ABC est un triangle et P le point défini par :* $5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0}$.

Montrer que $ABPC$ est un trapèze.

Astuce. *Pour montrer que $ABPC$ est un trapèze, il faut montrer que les droites (CP) et (AB) sont parallèles, c'est à dire que les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires.*

Or on sait que :

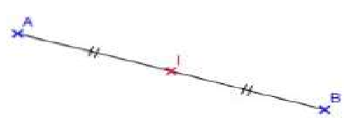
$$5\overrightarrow{AB} + 4\overrightarrow{PC} = \overrightarrow{0} \quad \text{éq} : \overrightarrow{AB} = \frac{4}{5}\overrightarrow{CP}$$

Donc, les vecteurs $\overrightarrow{CP}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires, ceci signifie que les droites (CP) et (AB) sont parallèles. D'où $ABPC$ est un trapèze.

Milieu d'un segment

Définition 24 *Soit $[AB]$ un segment.*

On dit que I est le milieu du segment $[AB]$ si : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0}$.



Propriété 25 *Soit $[AB]$ un segment.*

I est le milieu du segment $[AB]$ si et seulement si : $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$ *ou* $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$.

Démonstration 26 *On a I est le milieu du segment $[AB]$, donc :*

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \iff -\overrightarrow{IA} = \overrightarrow{IB} \iff \overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$$

D'autre part, on a I est le milieu du segment $[AB]$. Donc :

$$\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{0} \quad \text{éq} : \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \;\; \text{éq} : 2\overrightarrow{IA} = -\overrightarrow{AB} \iff \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$$

Exemple 27 *A, B ,C, M et N cinq points tels que :* $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{BN}$.

Montrer que le point C est le milieu du segment $[MN]$.

Propriété 28 (*La propriété caractéristique du milieu*)

Soit $[AB]$ un segment et I son milieu.

Pour tout point M du plan, on a :

$$2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$$

Démonstration 29 *Soit $[AB]$ un segment et I son milieu. Soit M un point du plan, on a :*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} &= \left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)+\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)\\ &= 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}\\ &= 2\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{0}\\ &= 2\overrightarrow{MI}\end{aligned}$$

D'où, pour tout point M du plan on a : $2\overrightarrow{MI}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$.

Exemple 30 *Soit ABC un triangle et M, N et P trois points tels que :* $\overrightarrow{AM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AN}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}-\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

1. *Montrer que :* $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{MP}=-2\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{AP}$.
2. *Montrer que M est le milieu du segment $[NP]$.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**