Professeur : Yahya MATIOUI

Ensemble des nombres entiers naturels et notions en arithmétique.

La divisibilité dans l'ensemble $\mathbb{N}$

Notations et vocabulaires.

Définition 1 .

- *Tous les nombres entiers naturels forment un ensemble qu'on note* $\mathbb{N}$ *appelé l'ensemble des entiers naturels et qui est défini comme suit :*

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$$

- *On désigne par* $\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\}$ *l'ensemble des entiers naturels non nuls.* $\mathbb{N}^*$ *se lit* $\mathbb{N}$ *privé de zéro.*

Exemple 2 .

1. $3 \in \mathbb{N}$, $0 \in \mathbb{N}$.
2. $-5 \notin \mathbb{N}$, $0 \notin \mathbb{N}^*$.
3. $2,5 \notin \mathbb{N}$, $\frac{16}{5} \notin \mathbb{N}$ *et* $\frac{16}{8} \in \mathbb{N}$.

Les nombres pairs et les nombres impairs

Définition 3 .

- *On dit qu'un entier* n *est un entier pair s'il est divisible par* 2.
- *Un entier qui n'est pas pair est un entier impair.*

Exemple 4 .

- *L'ensemble des entiers naturels pairs peut être écrit comme ceci :*

$$\textit{Entiers naturels pairs} = \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, ...\}$$

- *L'ensemble des entiers naturels impairs peut être écrit comme ceci :*

$$\textit{Entiers naturels impairs} = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, ...\}$$

Propriété 5 .

■ *Un entier naturel n est **pair** si et seulement s'il s'écrit sous la forme*

$$n = 2 \times k \quad avec\ k \in \mathbb{N}$$

■ *Un entier naturel n est **impair** si et seulement s'il s'écrit sous la forme*

$$n = 2 \times k + 1 \quad avec\ k \in \mathbb{N}$$

Exemple 6 *Soit n un entier naturel.*

1. *Montrer que si n est pair alors n^2 pair.*
2. *Montrer que si n est impair alors n^2 impair.*

- *Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k$.*

  Donc

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k)^2 \\ &= 4k^2 \\ &= 2 \times \left(2k^2\right) \end{aligned}$$

  On pose $p = 2k^2 \in \mathbb{N}$, on obtient

$$n^2 = 2p$$

  Ceci signifie que n^2 est pair.

- *Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $n = 2k + 1$.*

  Donc

$$\begin{aligned} n^2 &= (2k+1)^2 \\ &= 4k^2 + 4k + 1 \\ &= 2(2k^2 + 2k) + 1 \end{aligned}$$

  On pose $p' = 2k^2 + 2k \in \mathbb{N}$, on obtient

$$n^2 = 2p' + 1$$

  Ceci signifie que n^2 est impair.

Propriété 7 *La somme de deux entiers naturels de même parité est un entier naturel pair.*
(C'est : pair + pair = pair et impair + impair = pair)

Démonstration 8 *Soient n et m deux entiers naturels.*
On va distinguer deux cas, lorsque n et m sont pairs et lorsqu'ils ont impairs.

1er cas .

- *Si* n *est pair, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n = 2k$.
- *Si* m *est pair, alors il existe* $k' \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n = 2k'$.

  Donc

$$\begin{aligned} n + m &= 2k + 2k' \\ &= 2(k + k') \end{aligned}$$

On pose $p = k + k' \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$n + m = 2p$$

Ceci signifie que $n + m$ *est pair.*

2ème cas .

- *Si* n *est impair, alors il existe* $k \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n = 2k + 1$.
- *Si* m *est impair, alors il existe* $k' \in \mathbb{N}$ *tel que :* $n = 2k' + 1$

  Donc

$$\begin{aligned} n + m &= 2k + 1 + 2k' + 1 \\ &= 2(k + k' + 1) \end{aligned}$$

On pose $p' = k + k' + 1 \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$n + m = 2p'$$

Ceci signifie que $n + m$ *est pair.*

Remarque 9 .
Écrit de façon abrégée, on a :

$$\begin{aligned} pair + pair &\longrightarrow pair \\ pair + impair &\longrightarrow impair \\ impair + impair &\longrightarrow pair \\ pair \times nombre &\longrightarrow pair \end{aligned}$$

Exemple 10 *Soit* n *un entier naturel.*
Montrer que $n(n+1)$ *est pair.*

Démonstration 11 .
On va distinguer deux cas, lorsque n *est pair et lorsqu'il est impair.*

1er cas .

- *Si n est pair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :* $n = 2k$.
  Donc

$$\begin{aligned} n(n+1) &= 2k(2k+1) \\ &= 4k^2 + 2k \\ &= 2\left(2k^2 + k\right) \end{aligned}$$

  On pose $p = 2k^2 + k \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$n(n+1) = 2p$$

  Ceci signifie que $n(n+1)$ *est pair.*

2ème cas .

- *Si n est impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que :* $n = 2k + 1$.
  Donc

$$\begin{aligned} n(n+1) &= (2k+1)(2k+2) \\ &= 4k^2 + 4k + 2k + 2 \\ &= 2\left(2k^2 + 2k + k + 1\right) \end{aligned}$$

  On pose $p' = 2k^2 + 2k + k + 1 \in \mathbb{N}$, *on obtient*

$$n(n+1) = 2p'$$

  Ceci signifie que $n(n+1)$ *est pair.* $\square$
  Alors dans tous les cas $n(n+1)$ *est un pair.*

Ceci nous permet d'énoncer le résultat suivant :
Le produit de deux entiers successifs (qui se suivent) quelconques est un nombre pair.

Remarque 12 *Soit* $k \in \mathbb{N}$. *Les deux nombres* k *et* $k+1$ *sont successifs donc le produit* $k(k+1)$ *est pair.*

Exemple 13 *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *Montrer que* $A = n^2 + 3n + 2$ *est pair.*

Diviseurs et Multiples d'un entier

Définition 14 *Soient* a *et* b *deux entiers naturels. S'il existe un entier naturel* k *tel que*

$$a = k \times b$$

On dit que

- b *divise* a *(ou* b *est un diviseur de* a*). On note* $b \mid a$.
- a *est un multiple de* b.

■ *a est divisible par b.*

Exemple 15 .

7 *divise* 56 *car* $56 = 7 \times 8$. 7 *est un diviseur de* 56 *et* 56 *est un multiple de* 7. *On peut écrire* $7 \mid 56$.

Exemple 16 .

Soit n un entier naturel impair.
Montrer que 8 divise $n^2 - 1$.
Soit n un entier naturel impair, alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2k + 1$
donc

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= (2k+1)^2 - 1 \\ &= (2k+1-1)(2k+1+1) \\ &= 2k(2k+2) \\ &= 4k(k+1) \end{aligned}$$

et comme $k(k+1)$ est un entier pair alors il existe $k' \in \mathbb{N}$ tel que $k(k+1) = 2k'$ d'où

$$n^2 - 1 = 8k'$$

donc 8 divise $n^2 - 1$.

Remarque 17 .

■ 0 *est un multiple de tous les entiers naturels.*

■ 1 *est un diviseur de tous les entiers naturels.*

■ *Tous les entiers naturels sont divisibles par 1 et par eux-même.*

■ *Tout entier naturel non nul a un nombre fini de diviseurs. Pour simplifier les écritures, on notera souvent $D(n)$, l'ensemble des diviseurs de n dans $\mathbb{N}$.*

Exemple 18 .

- *Les diviseurs de 30 sont :* $D(30) = \{1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 30\}$
- *Les multiples de 30 sont :* $M(30) = \{0, 30, 60, 90, ...\}$ *(il y'en a une infinité)*

Propriété 19 (*La divisibilité par :* $2, 3, 5, 9$)

■ *Un entier est divisible par 2 si son chiffre des unités est pair (c-à-d : 0 ; 2 ; 4 ; 6 ; 8).*

■ *Un entier est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3.*

■ *Un entier est divisible par 5 s'il se termine par 0 ou 5.*

■ *Un entier est divisible par 9 si la somme de ses chiffres est divisible par 9.*

Propriété 20 .

Soient a, b et d trois entiers naturels.

Si *d est un diviseur commun à a et b avec $a > b$* ***alors*** *d est également un diviseur de $a+b$ et de $a-b$.*

Généralement, si d divise a et b alors d divise tout nombre de la forme $au+bv$ où u et v sont des entiers naturels.

Démonstration 21 .

Si d divise a et b alors il existe deux entiers naturels k et k' tels que

$$a = kd \quad et \quad b = k'd.$$

Donc

$$a+b = kd+k'd = d(k+k') \ , \ a-b = kd-k'd = d(k-k') \quad et \qquad au+bv = kdu+k'dv = d(ku+k'v)$$

c'est-à-dire

$$a+b = kd+k'd = d\times \underbrace{p}_{\in\mathbb{N}} \ , \ a-b = kd-k'd = d\times \underbrace{p'}_{\in\mathbb{N}} \quad et \qquad au+bv = kdu+k'dv = d\times \underbrace{p''}_{\in\mathbb{N}}$$

Donc d divise $a+b$, $a-b$ et $au+bv$. □

Exemple 22 *Soit d un entier naturel non nul et on pose $a = 3n+2$ et $b = n-3$.*

Montrer que tout diviseur de a et b est un diviseur de 11.

■ *Soit d un diviseur de a et de b; alors d divise $a - 3b$.*

Par suite,

$$\begin{aligned} d \text{ divise } \ a-3b, \ c-\grave{a}-d \ &: \ d \ \text{ divise } \ (3n+2)-3(n-3) \\ c-\grave{a}-d \ &: \ d \ \text{ divise } \ 3n+2-3n+9 \\ c-\grave{a}-d \ &: \ d \ \text{ divise } \ 11 \end{aligned}$$

Exemple 23 *Trouver les entiers naturels n pour lesquels $\dfrac{n+15}{n+2} \in \mathbb{N}$.*

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a : $n+15 = n+2+13$, donc

$$\frac{n+15}{n+2} = \frac{n+2+13}{n+2} = 1 + \frac{13}{n+2}$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{n+15}{n+2} \epsilon \ \mathbb{N} \ \ \acute{e}q \ &: \ \frac{13}{n+2} \in \mathbb{N} \\ \acute{e}q \ &: \ (n+2) \mid 13 \end{aligned}$$

et comme les diviseurs de 13 sont : 13 et 1. Il y a donc 2 équations à résoudre

$$n+2 = 1 \ \ ou \ \ n+2 = 13 \iff n = -1 \quad ou \quad n = 11$$

et puisque $-1 \notin \mathbb{N}$, alors $\dfrac{n+15}{n+2} \in \mathbb{N}$ si et seulement si $n = 11$.

Exemple 24 *Déterminer les entiers naturels n tels que $2n-3$ divise $n+5$.*

- *Si n un entier naturel tel que $2n-3$ divise $n+5$ alors $2n-3$ divise aussi $2n+10$ et aussi la différence $(2n+10)-(2n-3)=13$.*

  Les diviseurs de 13 sont 1 et 13. On en déduit que n vaut 2 ou 8.

  Réciproquement, ces nombres sont tels que : $2n-3 \mid n+5$.

  Donc $2n-3$ divise $n+5$ si et seulement si $n=2$ ou $n=8$.

Les nombres premiers

Définition et propriétés

Définition 25 *Un nombre qui a exactement deux diviseurs est appelé nombre premier. c-à-d n'admet que deux diviseurs 1 et lui même.*

Exemple 26 *.*

- *Les nombres premiers inferieurs à 30 sont:* $2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29$.

- *Un nombre premier p est un entier naturel supérieur ou égal à 2 soit : $p \geq 2$.*

- *Pour la culture, deux nombres premiers consécutifs comme 11 et 13, 17 et 19 ou 41 et 43 sont appelés nombres* ***jumeaux.***

Théorème 27 (*Critère d'arrêt*)

- *Tout entier naturel n, $n \geq 2$, admet un diviseur premier.*

- *Si n n'est pas premier, alors il admet un diviseur premier p tel que :*

$$2 \leq p \leq \sqrt{n}$$

Remarque 28 *.*

Dans la partique pour déterminer si un entier naturel n est premier, on teste sa divisibilité par tous les nombres premiers dont le carré est inférieur à n. Si aucun de ces nombres premiers ne divise n alors n est premier.

Méthode *Le nombre* 391 *est-il premier ?*

On a $\sqrt{391} \approx 19,8$.

On doit donc tester la divisibilité de 391 par tous les nombres premiers inférieurs ou égaux à 19.

On teste la divisibilité par 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 *et* 19.

Les critères de divisibilités permettent de vérifier facilement que 391 n'est pas divisible par 2, 3 et 5. En vérifiant par calcul pour 7, 11, 13,17 et 19, on constate que $391 \div 17 = 23$. On en déduit que 391 n'est pas premier.

Exemple 29 409 *est-il premier ?*

Théorème 30 (*Admis*)

Il existe une infinité de nombres premiers.

Décomposition d'un entier

Théorème 31 .
Tout entier $n \geq 2$, peut se décomposer de façon unique en produit de facteurs premiers.

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times ... \times p_n^{\alpha_n},$$

avec $p_1,\ p_2, ..., p_n$ nombres premiers distincts
et $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ entiers naturels non nuls

Démonstration 32 . *Admis*

Exemple 33 *La décomposition en produit de facteurs premiers du nombre* 36 *est* : $36 = 2^2 \times 3^2$. *Mais l'écriture* $36 = 4 \times 9$ *n'est pas une décomposition en produit de facteurs premiers.*

Méthode .

- *Pour décomposer un entier en produit de facteurs premiers, on effectue des divisions successives par des nombres premiers dans l'ordre croissant. On va décomposer le nombre 882 :*

882	2
441	3
147	3
49	7
7	7
1	

donc $882 = 2 \times 3^2 \times 7^2$

- *Décomposons le nombre* 960

660	2
330	2
165	3
55	5
11	11
1	

donc $660 = 2^2 \times 3 \times 5 \times 11$

Le plus grand diviseur commun (PGCD)

Définition 34 *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle PGCD de a et b le plus grand diviseur commun de a et b, on le note souvent par $PGCD(a, b)$ ou $a \wedge b$.*

Exemple 35 *Déterminons* $PGCD\,(24,18)$.

Les diviseurs de 24 *sont* : $1,2,3,4,6,8,12,24$

Les diviseurs de 18 *sont* : $1,2,3,6,9,18$.

Donc les diviseurs communs de 24 *et* 18 *sont* : $1,2,3,6$. *D'où*

$$PGCD\,(24,18) = 6$$

Théorème 36 .

Soient a *et* b *deux entiers naturels non nuls. Les diviseurs communs de* a *et* b *sont exactement les diviseurs de* $PGCD(a,b)$:

$$d \mid a \quad et \quad d \mid b \quad ssi:\ d \mid PGCD(a,b)$$

Démonstration 37 . *Admis*

Exemple 38 *Soient* a *et* b *deux entiers naturels non nuls. Soient* $x = 7a+5b$ *et* $y = 4a+3b$.

Montrer que : $PGCD(x,y) = PGCD(a,b)$.

- *On revient à la définition du* $PGCD$ *en montrant que* :

$$PGCD(x,y) \mid PGCD(a,b) \quad puis \quad PGCD(a,b) \mid PGCD(x,y)$$

Pour se simplifier les notations, on pose $d = PGCD(a,b)$ *et* $d' = PGCD(x,y)$.

- d *divise* a *et* b, *donc* d *divise aussi* $x = 7a+5b$ *et* $y = 4a+3b$. *On en déduit que* $d \mid d'$.
- *De même, si* d' *divise* $7a+5b$ *et* $4a+3b$ *alors* d' *divise aussi* $7(4a+3b)-4(7a+5b) = b$ *et* $3(7a+5b)-5(4a+3b) = a$. *Donc* $d' \mid d$.

Comme d *divise* d' *et* d' *divise* d, *on a donc* $d = d'$.

Propriété 39 .

Le plus grand diviseur commun de deux entiers naturels a *et* b *est le produit des facteurs premiers communs (dans leurs décomposition en produit de facteurs premiers) élevé au petit exposant.*

Démonstration 40 . *Admis*

Exemple 41 *Déterminer* : $PGCD(1960, 34300)$.

On a : $1960 = 2^3 \times 5^1 \times 7^2$ *et* $34300 = 2^2 \times 5^2 \times 7^3$.

On en déduit que : $PGCD(1960, 34300) = 2^2 \times 5^1 \times 7^2 = 980$.

Nombres premiers entre eux

Définition 42 *On dit que a et b sont premiers entre eux si et seulement si $PGCD(a, b) = 1$.*

Exemple 43 *$PGCD(15, 8) = 1$, donc 15 et 8 sont premiers entre eux.*

Remarque 44 *Il ne faut pas confondre des nombres premiers entre eux et des nombres premiers : 15 et 8 sont premiers entre eux sans pour autant être premiers.*

Exercice d'application 45 .

1. *Déterminer $PGCD(113400, 3667356)$.*
2. *En déduire l'écriture simplifiée de $\dfrac{113400}{3667356}$ et $\sqrt{113400}$.*

- *On a* : $113400 = 2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7$ *et* $3667356 = 2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11$

  Pour trouver le $PGCD$, on ne prend que les facteurs premiers qui apparaissent dans les deux décompositions et on les affecte du plus petit exposant.

$$PGCD(113400, 3667356) = 2^2 \times 3^4 \times 7 = 2268$$

- *On a*

$$\begin{aligned}\frac{113400}{3667356} &= \frac{2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}{2^2 \times 3^5 \times 7^3 \times 11}\\ &= \frac{2 \times 5^2}{3 \times 7^2 \times 11}\\ &= \frac{50}{1617}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sqrt{113400} &= \sqrt{2^3 \times 3^4 \times 5^2 \times 7}\\ &= \sqrt{2^2 \times \left(3^2\right)^2 \times 5^2 \times 2 \times 7}\\ &= \sqrt{\left(2 \times 3^2 \times 5\right)^2 \times 2 \times 7}\\ &= \sqrt{\left(2 \times 3^2 \times 5\right)^2} \times \sqrt{14}\\ &= 90\sqrt{14}\end{aligned}$$

Le plus petit multiple commun (PPCM)

Définition 46 *Soient a et b deux entiers naturels non nuls. On appelle $PPCM$ de a et b le plus petit multiple commun non nul de a et b, on le note souvent par $PPCM(a; b)$ ou $a \vee b$.*

Exemple 47 *Déterminons le* $PPCM(8;12)$.

les multiples de 8 *sont* : $0, 8, 16, 24, 32...$

les multiples de 12 *sont* : $0, 12, 24, 36, 48...$

Donc 24 *est le plus petit multiple commun de* 8 *et* 12; *c-à-d* :

$$PPCM(8, 12) = 24.$$

Propriété 48 .

Le plus petit multiple commun de deux entiers naturels a *et* b *est égal au produit de tous les facteurs premiers des deux décompositions affectés de leur plus grand exposant.*

Démonstration 49 . *Admis*

Exemple 50 .

Déterminons le $PPCM(264; 2268)$:

On a : $264 = 2^3 \times 3 \times 11$ *et* $2268 = 2^2 \times 3^4 \times 7$.

On en déduit que :

$$PPCM(264, 2268) = 2^3 \times 3^4 \times 11 \times 7 = 49896$$

Propriété 51 .

Soient a *et* b *deux entiers naturels non nuls.*

On a

$$PGCD(a, b) \times PPCM(a, b) = a \times b$$

Démonstration 52 . *Admis*

Exemple 53 *Sachant que* $PPCM(72, 132) = 792$; *cherchons le* $PGCD(72, 132)$:

On a

$$PGCD(72, 132) = \frac{72 \times 132}{792} = 12$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com