CORRECTION EXAMEN 2020

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n}{2u_n+5} \end{cases}$

1. *Calculons* u_1 :

   On a : $u_1 = \dfrac{2u_0}{2u_0+5} = \dfrac{2\times\dfrac{3}{2}}{2\times\dfrac{3}{2}+5} = \dfrac{3}{8}$, *donc* $u_1 = \dfrac{3}{8}$.

2. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$.

   Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = \dfrac{3}{2}$ *alors* $u_0 > 0$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $u_n > 0$ *et montrons que :* $u_{n+1} > 0$.

   On a : $u_n > 0$ *alors* $2u_n > 0$ *et comme* $5 > 0$ *alors* $2u_n + 5 > 0$ *donc* $\dfrac{2u_n}{2u_n+5} > 0$ *c'est-à-dire* $u_{n+1} > 0$.

   D'où d'après le principe de récurrence on déduit que

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n > 0$$

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}),\ 0 < u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \frac{2}{5}u_n &= \frac{2u_n}{2u_n+5} - \frac{2}{5}u_n \\ &= \frac{10u_n - 4u_n^2 - 10u_n}{5(2u_n+5)} \\ &= \frac{-4u_n^2}{5(2u_n+5)} \end{aligned}$$

   et comme $u_n > 0$ *alors* $\dfrac{-4u_n^2}{5(2u_n+5)} \leq 0$, *donc* $u_{n+1} \leq \dfrac{2}{5}u_n$.

   D'autre part, puisque $u_n > 0$ *alors* $u_{n+1} > 0$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n.$$

Déduisons que : $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$.

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = \frac{3}{2}$ *alors* $0 < u_0 \leq \frac{3}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$, *montrons que :* $0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$.

On a : $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ *alors* $0 < \frac{2}{5}u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$ *et comme* $0 < u_{n+1} \leq \frac{2}{5}u_n$ *alors*

$$0 < u_{n+1} \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}$$

Donc d'après le principe de récurrence on déduit que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, 0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n.$$

b) *Calculons* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$:

On a : $0 < u_n \leq \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n$ *et comme* $-1 < \frac{2}{5} < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \frac{3}{2}\left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$. *D'après le théorème de la limite par encadrement on déduit que*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$$

4. On considère la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *définie par :* $v_n = \frac{4u_n}{2u_n + 3}$.

a) *Montrons que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite géométrique de raison* $\frac{2}{5}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} &= \frac{4u_{n+1}}{2u_{n+1}+3} \\
&= \frac{4 \times \dfrac{2u_n}{2u_n+5}}{2 \times \dfrac{2u_n}{2u_n+5}+3} \\
&= \frac{\dfrac{8u_n}{2u_n+5}}{\dfrac{4u_n}{2u_n+5}+3} \\
&= \frac{\dfrac{8u_n}{2u_n+5}}{\dfrac{10u_n+15}{2u_n+5}} \\
&= \frac{8u_n}{10u_n+15} \\
&= \frac{2}{5}\left(\frac{4u_n}{2u_n+3}\right) \\
&= \frac{2}{5}v_n
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_{n+1} = \frac{2}{5}v_n$$

ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) *La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison $\frac{2}{5}$. On sait que pour tout entier naturel n :*

$$v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n v_0$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), v_n = \left(\frac{2}{5}\right)^n$$

Déduisons u_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{4u_n}{2u_n+3} \\
&\Longleftrightarrow v_n\left(2u_n+3\right) = 4u_n \\
&\Longleftrightarrow 2v_nu_n + 3v_n = 4u_n \\
&\Longleftrightarrow 2v_nu_n - 4u_n = -3v_n \\
&\Longleftrightarrow u_n\left(2v_n-4\right) = -3v_n \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{-3v_n}{2v_n-4} \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{3v_n}{4-2v_n} \\
&\Longleftrightarrow u_n = \frac{3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{4-2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\forall n \in \mathbb{N}\right),\ u_n = \frac{3\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}{4-2\times\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$$

EXERCICE 2 .

1. *Dans l'ensemble* $\mathbb{C}$ *des nombres complexes, on considère l'équation :*

$$(E) : z^2 - 2(\sqrt{2}+\sqrt{6})z + 16 = 0$$

a) *Vérifions que le discrimiant de l'équation* (E) *est :* $\Delta = -4(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2$
On a : $a = 1,\ \ b = -2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$ *et* $c = 16$, *donc*

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= \left[-2(\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]^2 - 64 \\
&= 4(2+2\sqrt{12}+6) - 64 \\
&= 32 + 8\sqrt{12} - 64 \\
&= -32 + 8\sqrt{12} \\
&= -4\left(6 - 2\sqrt{12} + 2\right) \\
&= -4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2
\end{aligned}$$

b) *Déduisons les solutions de l'équation* (E) *:*

L'équation (E) admet deux solutions complexes conjuguées z_1 et z_2 telles que :

$$\begin{aligned}
z_1 &= \frac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\sqrt{4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)^2}}{2} \\
&= \frac{2\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+2i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{2} \\
&= \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)
\end{aligned}$$

et : $z_2=\overline{z_1}=\left(\overline{(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})}\right)=\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)-i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$. *Donc*

$$S=\left\{(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}),(\sqrt{2}+\sqrt{6})-i(\sqrt{6}-\sqrt{2})\right\}$$

2. *Soient les nombres complexes* $a=(\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $b=1+i\sqrt{3}$ *et* $c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

a) *Vérifions que :* $b\overline{c}=a$, *puis déduire que* $ac=4b$

On a

$$\begin{aligned}
b\overline{c} &= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\overline{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}\right) \\
&= \left(1+i\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{2}-i\sqrt{2}\right) \\
&= \sqrt{2}-i\sqrt{2}+i\sqrt{6}+\sqrt{6} \\
&= (\sqrt{2}+\sqrt{6})+i(\sqrt{6}-\sqrt{2}) \\
&= a
\end{aligned}$$

alors $b\overline{c}=a$ *donc* $b\overline{c}.c=ac$, *et comme* $c\overline{c}=(\sqrt{2}-i\sqrt{2})(\sqrt{2}+i\sqrt{2})=4$, *alors on obtient :*

$$ac=4b$$

D'où $b\overline{c}=a$ *et* $ac=4b$.

b) *L'écriture trigonométrique des nombres complexes :* b *et* c.

On a $|b|=|c|=2$ *donc*

$$b=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

et

$$c=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right).$$

donc

$$b=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\quad\text{et}\quad c=2\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$$

c) *Déduisons que :* $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$.

On a : $|a| = |b\overline{c}| = |b|\,|\overline{c}| = 2\times 2 = 4$, *et*

$$\begin{aligned}\arg(a) &\equiv \arg(b\overline{c})\,[2\pi]\\ &\equiv \arg(\overline{c}) + \arg(b)\,[2\pi]\end{aligned}$$

et comme $\arg(\overline{c}) \equiv -\arg(c)\,[2\pi]$, *alors* $\arg(\overline{c}) \equiv -\frac{\pi}{4}\,[2\pi]$, *donc*

$$\begin{aligned}\arg(a) &\equiv -\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \quad / \quad \arg(b) \equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi]\end{aligned}$$

d'où

$$a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$$

3. *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonomré direct* $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$*; on considèreles points* B, C *et* D *d'affixes respectives* b, c *et* d *telle que* $d = a^4$. *Soient* z *l'affixe d'un point* M *du plan et* $z^{'}$ *l'affixe de* M' *image de* M *par le rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$.

a) *Vérifions que :* $z' = \frac{1}{4}az$

On a

$$R(M) = M' \iff z' - z_o = e^{i\frac{\pi}{12}}(z - z_o) \iff z' = \left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) z = \frac{a}{4}z$$

donc

$$z' = \frac{a}{4}z$$

b) *On cherche l'image du point* C *par la rotation* R

On a d'après l'expression complexe de la rotation R :

$$\frac{a}{4}c = \frac{ac}{4} = b$$

donc l'image du point C *par la rotation* R *de centre* O *et d'angle* $\frac{\pi}{12}$ *est le point* B.

c) *La nature du triangle* OBC.

On a

$$R(C) = B \iff \begin{cases} OB = OC \\ \left(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi]\end{cases}$$

Donc, le triangle OBC *est isocéle en* O.

d) *Montrons que :* $a^4 = 128b$

On a : $a = 4\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$*, et d'après la formule de Moivre, on a :*

$$\begin{aligned} a^4 &= 4^4.\left(\cos\left(4\times\frac{\pi}{12}\right) + i\sin\left(4\times\frac{\pi}{12}\right)\right) \\ &= 256\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\ &= \frac{256}{2}(1+i\sqrt{3}) \\ &= 128b \end{aligned}$$

donc

$$a^4 = 128b$$

Déduisons que les points O, B *et* D *sont alignés :*

On a :

$$\frac{d - z_o}{b - z_o} = \frac{d}{b} = \frac{a^4}{b} = \frac{128b}{b} = 128 \in \mathbb{R}$$

donc, les points O, B *et* D *sont alignés.*

EXERCICE 3 .

On considère la fonction numérique g *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = 2\sqrt{x} - 2 - \ln x$

1. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ g'(x) = \dfrac{\sqrt{x}-1}{x}$.

Les fonctions $u : x \longmapsto 2\sqrt{x}$, $v : x \longmapsto -2$ *et* $w : x \longmapsto -\ln x$ *sont dérivable sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction* $f = u + v + w$ *est dérivables sur* $]0,+\infty[$.

Soit $x \in]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(2\sqrt{x} - 2 - \ln x\right)' \\ &= 2\times\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sqrt{x}-1}{x} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\quad g'(x) = \frac{\sqrt{x}-1}{x}.$$

b) *Montrons que* g *est croissante sur* $[1,+\infty[$.

Le signe de $g'(x)$ *sur* $[1,+\infty[$ *est le même que celui de* $\sqrt{x}-1$ *et comme*

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ x \geq 1 \iff \sqrt{x} - 1 \geq 0$$

donc la fonction g *est croissante sur* $[1,+\infty[$.

c) *Déduisons que :* $(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ \ 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$

La fonction $x \longmapsto \ln x$ *est croissante sur* $[1,+\infty[$ *alors*

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ \ln 1 \leq \ln x$$

donc

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ 0 \leq \ln x \qquad (\clubsuit)$$

Comme la fonction g *est croissante sur* $[1,+\infty[$ *, alors pour tout* $x \in [1,+\infty[$:

$$g(x) \geq g(1) \iff 2\sqrt{x}-2-\ln x \geq 0 \iff \ln x \leq 2\sqrt{x}-2 \implies \ln x \leq 2\sqrt{x} \quad (\clubsuit\clubsuit)$$

d'après $(\clubsuit)$ *et* $(\clubsuit\clubsuit)$ *on déduit que*

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ 0 \leq \ln x \leq 2\sqrt{x}$$

d) *Montrons que :* $(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ \ 0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$.

Soit $x \in [1,+\infty[$ *, on a*

$$\begin{aligned}
0 \quad &\leq \quad \ln x \leq 2\sqrt{x} \\
&\iff \quad 0 \leq (\ln x)^3 \leq 8\sqrt{x^3} \\
&\iff \quad 0 \leq (\ln x)^3 \leq 8x\sqrt{x} \quad / \quad \sqrt{x^3} = x\sqrt{x} \\
&\iff \quad 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8x\sqrt{x}}{x^2} \\
&\iff \quad 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8\sqrt{x}}{x} \\
&\iff \quad 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in [1,+\infty[)\,,\ 0 \leq \frac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \frac{8}{\sqrt{x}}.$$

Déduisons que : $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2}$:

On a $0 \leq \dfrac{(\ln x)^3}{x^2} \leq \dfrac{8}{\sqrt{x}}$ *et comme* $\displaystyle\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{8}{\sqrt{x}} = 0$ *alors d'après le théorème de la limite par encadrement on déduit que*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^3}{x^2} = 0.$$

2. **a)** *Montrons que la fonction* $G : x \longmapsto x\left(-1 + \dfrac{4}{3}\sqrt{x} - \ln x\right)$ *est une primitive de* g *sur* $]0,+\infty[$.

La fonction G est dérivable sur $]0,+\infty[$.
Soit $x \in]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
G'(x) &= \left(x\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)\right)' \\
&= \left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+x\left(\frac{4}{3}\times\frac{1}{2\sqrt{x}}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x\right)+\frac{2x}{3\sqrt{x}}-1 \\
&= -2+\frac{4}{3}\sqrt{x}-\ln x+\frac{2\sqrt{x}}{3} \\
&= 2\sqrt{x}-2-\ln x \\
&= g(x)
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in]0,+\infty[), G'(x) = g(x)$$

d'où la fonction G est une primitive de g sur $]0,+\infty[$.

b) *Calculons l'intégrale* $\int_1^4 g(x)\,dx$:

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^4 g(x)\,dx &= [G(x)]_1^4 \\
&= G(4)-G(1) \\
&= 4\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{4}-\ln 4\right)-1\left(-1+\frac{4}{3}\sqrt{1}-\ln 1\right) \\
&= 4\left(\frac{5}{3}-\ln 4\right)-\frac{1}{3} \\
&= \frac{20}{3}-4\ln 4-\frac{1}{3} \\
&= \frac{19}{3}-8\ln 2
\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^4 g(x)\,dx = \frac{19}{3}-8\ln 2$$

EXERCICE 4 .

PROBLEME 5 *On considère la fonction numérique f définie sur* $\mathbb{R}$ *par* :

$$f(x) = -x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)$$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. (*unité* : 2cm).

1. • *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=+\infty$:

   On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}-x+\frac{5}{2}=+\infty$ *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=+\infty$$

   • *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=-\infty$:

   On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}-x+\frac{5}{2}=-\infty$ *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=-\infty$$

2. **a)** *Pour montrer que la droite* (Δ) *d'équation* $y=-x+\frac{5}{2}$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $-\infty$*, il suffit de montrer que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0$.

   On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)-(-x+\frac{5}{2}) &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-x+\frac{5}{2}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)+x-\frac{5}{2}\\ &= \lim_{x\longrightarrow-\infty}-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=0\end{aligned}$$

   donc

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)=0.$$

   D'où, la droite (Δ) *d'équation* $y=-x+\frac{5}{2}$ *est une asymptote à la courbe* (C) *au voisinage de* $-\infty$.

   b) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* : $e^{x-2}-4=0$

   Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$e^{x-2}-4=0 \iff e^{x-2}=4 \iff x-2=\ln 4 \iff x=2+\ln 4$$

   donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S=\{2+\ln 4\}$$

   Évaluons le signe de : $f(x)-\left(-x+\frac{5}{2}\right)$:

   Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$f(x)-(-x+\frac{5}{2})=-\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2}-4)=\frac{1}{2}e^{x-2}\left(4-e^{x-2}\right)$$

comme $\frac{1}{2}e^{x-2} > 0$ *, et* $4 - e^{x-2} = e^{\ln(4)} - e^{x-2}$ *et la fonction* $t \longmapsto e^t$ *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$ *alors le signe de* $f(x) - \left(-x + \frac{5}{2}\right)$ *sur* $\mathbb{R}$ *est le même que celui de* $\ln(4) - (x-2)$.

Donc

x	$-\infty$ $2+ln(4)$ $+\infty$
$f(x)-(x+\frac{5}{2})$	$+$ 0 $-$

ceci signifie que :

- *La courbe* (C) *est au-dessous de la droite* (Δ) *sur* $]2 + \ln 4, +\infty[$.
- *La courbe* (C) *est au-dessus de la droite* (Δ) *sur* $]-\infty, 2 + \ln 4[$.
- $(C_f) \cap (\Delta) = \left\{ B\left(2 + \ln(4), 2\ln 2 + \frac{9}{2}\right)\right\}$.

3. *Montrons que :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}(e^{x-2} - 4)}{2x} \\ &= \lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} - \frac{e^{x-2}}{x-2} \times \frac{x-2}{2x} \times (e^{x-2} - 4)\end{aligned}$$

on pose $X = x - 2$*, alors* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{e^{x-2}}{x-2} = \lim_{X \longrightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty$, $\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-2}{2x} = \frac{1}{2}$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} (e^{x-2} - 4) = +\infty$ *et* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} -1 + \frac{5}{2x} = -1$*. Donc*

$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

La courbe (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.

4. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$

Les fonction $u : x \longmapsto -x + \frac{5}{2}$, $v : x \longmapsto \frac{-1}{2}e^{x-2}\left(e^{x-2} - 4\right)$ *sont dérivables sur* $\mathbb{R}$ *donc la fonction* $f = u + v$ *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (-x + \frac{5}{2} - \frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4))' \\
&= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{x-2}(e^{x-2} - 4) + \frac{1}{2}e^{x-2} \times e^{x-2}\right) \\
&= -1 - \left(\frac{1}{2}e^{2x-4} - 2e^{x-2} + \frac{1}{2}e^{2x-4}\right) \\
&= -1 - e^{2x-4} + 2e^{x-2} \\
&= -((e^{x-2})^2 - 2e^{x-2} + 1) \\
&= -(e^{x-2} - 1)^2
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2$$

b) *Le tableau de variations de la fonction* f.

On a $(\forall x \in \mathbb{R}), f'(x) = -\left(e^{x-2} - 1\right)^2 \leq 0$, *et on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) = 0 &\iff -\left(e^{x-2} - 1\right)^2 = 0 \\
&\iff e^{x-2} - 1 = 0 \\
&\iff e^{x-2} = 1 \\
&\iff x - 2 = 0 \\
&\iff x = 2
\end{aligned}$$

donc

x	$-\infty$		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	2	$\searrow$	$-\infty$

5. *Calculons* $f''(x)$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$:

   La fonction f' *est dérivable sur* $\mathbb{R}$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \left(-(e^{x-2} - 1)^2\right)' \\
&= -2\left(e^{x-2} - 1\right) \times e^{x-2} \\
&= 2e^{x-2}\left(1 - e^{x-2}\right)
\end{aligned}$$

   donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f''(x) = 2e^{x-2}\left(1 - e^{x-2}\right)$$

♣ *Montrons que $A\left(2,2\right)$ est un point d'inflexion de $\left(C\right)$.*
Comme $2e^{x-2} > 0$ pour tout x dans $\mathbb{R}$, et $1 - e^{x-2} = e^{0} - e^{x-2}$ et la fonction $t \longmapsto e^{t}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ alors le signe de $f''(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le même que celui de $0 - (x-2) = 2 - x$, donc

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
Convexite–de(C)	*(C)convexe*		*(C)concave*

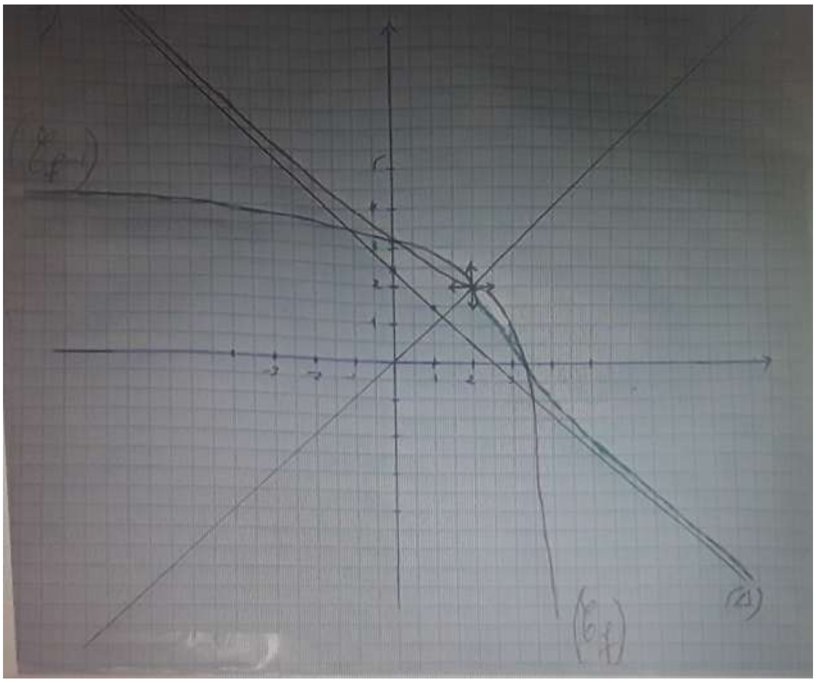
Puisque f'' s'annule en changeant de signe en $x = 2$ et comme $f\left(2\right) = 2$, alors le point $A(2,2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

6. *Montrons que l'équation $f(x) = 0$ admet unique solution α telle que :* $\alpha \in \left]2+\ln 3, 2+\ln 4\right[$

- *La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$ (car elle est dérivable sur $\mathbb{R}$), en particulier elle est continue sur* $\left[2+\ln 3, 2+\ln 4\right]$.
- *La fonction f est strictement décroissante sur* $\left[2+\ln 3, 2+\ln 4\right]$.
- *On a :* $f\left(2+\ln 3\right) = 2 - \ln\left(3\right) \approx 0,90 > 0$ *et* $f\left(2+\ln 4\right) = \dfrac{1}{2} - \ln\left(4\right) \approx -0,88 < 0$ *donc* $f(2+\ln 3) \times f(2+\ln 4) < 0$.

donc d'après le T.V.I l'équation $f\left(x\right) = 0$ admet une solution unique α telle que $2+\ln 3 < \alpha < 2+\ln 4$

7.



8. **a)** *La fonction* f *est continue et strictement décroissante sur* $\mathbb{R}$, *alors elle admet une fonction réciproque* f^{-1} *définie sur* J *telle que :* $J = f(I) = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   b) *Voir la courbe.*

   c) *Calculons :* $(f^{-1})'(2 - \ln 3)$.

   On a : $f(2+\ln 3) = 2-\ln 3$ *et comme* f *est dérivable en* $2+\ln 3$ *et* $f'(2+\ln 3) \neq 0$, *alors* f^{-1} *est dérivable en* $2 - \ln 3$ *et on a :*

$$(f^{-1})'(2 - \ln 3) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2 - \ln 3))} = \frac{1}{f'(2 + \ln 3)} = \frac{-1}{4}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com