Correction de la série sur les intégrales

EXERCICE 1 .

1. *Calculons l'intégrale :* $I = \int_1^2 \ln x dx$

   On pose

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x) = \ln x \\ v'(x) = 1 \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = x \end{array} \right.$$

   donc

$$\begin{aligned} \int_1^2 \ln x dx &= [x \ln x]_1^2 - \int_1^2 1 dx \\ &= 2\ln 2 - 0 - [x]_1^2 \\ &= 2\ln 2 - (2-1) \\ &= 2\ln 2 - 1 \end{aligned}$$

2. *Calculons l'intégrale :* $I = \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} |\ln x| \, dx$

   On a

$$(\forall x \in]0,1]), \;\; \ln x \leq 0 \quad et \quad (\forall x \in [1,+\infty[), \;\; \ln x \geq 0$$

   donc, en utilisant la relation de chasles on obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{e}}^{e} \frac{1}{x} |\ln x| \, dx &= -\int_{\frac{1}{e}}^{1} \frac{\ln x}{x} dx + \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx \\ &= -\left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} + \left[\frac{\ln^2 x}{2}\right]_1^e \\ &= \frac{\ln^2(\frac{1}{e})}{2} + \frac{\ln^2(e)}{2} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \end{aligned}$$

3. *Calculons l'intégrale :* $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\ln(1+\cos x) dx$

   On pose

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x) = \ln(1+\cos x) \\ v'(x) = \cos x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u'(x) = \dfrac{-\sin x}{1+\cos x} \\ v(x) = \sin x \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x).\ln(1+\cos x)dx &= [\sin x.\ln(1+\cos x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2 x}{1+\cos x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x}dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1-\cos x dx \\
&= [x-\sin x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{\pi}{2} - 1
\end{aligned}$$

EXERCICE 2 *1. Vérifions que :* $(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),\ \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ *, on a*

$$\begin{aligned}
\frac{x^2}{x+1} &= \frac{x^2+1-1}{x+1} \\
&= \frac{x^2-1}{x+1} + \frac{1}{x+1} \\
&= x - 1 + \frac{1}{x+1}
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}),\ \frac{x^2}{x+1} = x - 1 + \frac{1}{x+1}$$

2. Montrons que : $\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx = \ln 3$:

$$\begin{aligned}
\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}dx &= \int_0^2 x - 1 + \frac{1}{x+1}dx \\
&= \int_0^2 x - 1dx + \int_0^2 \frac{1}{x+1}dx \\
&= \left[\frac{x^2}{2} - x\right]_0^2 + [\ln(1+x)]_0^2 \\
&= 0 + \ln 3 \\
&= \ln 3
\end{aligned}$$

3. Montrons que : $\int_0^2 x\ln(1+x)dx = \frac{3}{2}\ln 3$

On pose

$$\left\{ \begin{array}{c} u(x) = \ln(1+x) \\ v'(x) = x \end{array} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{array}{c} u'(x) = \frac{1}{1+x} \\ v(x) = \frac{x^2}{2} \end{array} \right.$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_0^2 x\ln(1+x)dx &= \left[\frac{x^2\ln(1+x)}{2}\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2}{2(1+x)}dx \\
&= 2\ln 3 - \frac{1}{2}\int_0^2 \frac{x^2}{1+x}dx \\
&= 2\ln 3 - \frac{\ln 3}{2} \\
&= \frac{3}{2}\ln 3
\end{aligned}$$

EXERCICE 3 .

On pose : $I = \int_{-2}^{-1} \dfrac{x}{x+3}dx$ *et* $J = \int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)dx$:

1. *Montrons que :* $I = 1 - 3\ln 2$

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}dx &= \int_{-2}^{-1} \frac{x+3-3}{x+3}dx \\
&= \int_{-2}^{-1} 1 - \frac{3}{x+3}dx \\
&= \int_{-2}^{-1} 1dx - 3\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x+3}dx \\
&= [x]_{-2}^{-1} - 3\left[\ln(x+3)\right]_{-2}^{-1} \\
&= 1 - 3(\ln 2 - 0) \\
&= 1 - 3\ln 2
\end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $J = -I$.

   On pose

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln(2x+6) \\ v'(x) = 1 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{c} u'(x) = \dfrac{2}{2x+6} = \dfrac{1}{x+3} \\ v(x) = x \end{array}\right.$$

   donc

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{-1} \ln(2x+6)dx &= [x.\ln(2x+6)]_{-2}^{-1} - \int_{-2}^{-1} \frac{x}{x+3}dx \\
&= 0 - I \\
&= -I
\end{aligned}$$

   d'où

$$J = -I$$

EXERCICE 4 .

1. *La fonction $u : x \longmapsto 2x(x^2-1)^{2021}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ alors elle est continue sur $\mathbb{R}$ et admet donc des primitives sur $\mathbb{R}$. D'où les primitives de u sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions de la forme*

$$x \longmapsto \frac{(x^2-1)^{2022}}{2022} + k \text{ , avec } k \in \mathbb{R}.$$

Calculons l'intégrale : $\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2021}dx$:

$$\int_1^{\sqrt{2}} 2x(x^2-1)^{2021}dx = \left[\frac{(x^2-1)^{2022}}{2022}\right]_1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2022}$$

2. *Montrons que : $\int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx = 6\ln 3 - 2$:*

On pose

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = \ln(x+1) \\ v'(x) = 2x+1 \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} u'(x) = \dfrac{1}{x+1} \\ v(x) = x^2+x \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2x+1)\ln(x+1)dx &= \left[(x^2+x).\ln(x+1)\right]_0^2 - \int_0^2 \frac{x^2+x}{x+1}dx \\ &= 6\ln 3 - \int_0^2 \frac{x^2+x}{x+1}dx \\ &= 6\ln 3 - \int_0^2 x dx \\ &= 6\ln 3 - \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 = 6\ln 3 - 2 \end{aligned}$$

EXERCICE 5 .

On définit, pour tout entier naturel $n \geq 1$, l'intégrale :

$$I_n = \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx$$

1. *Calculons I_1 :*

On a : $I_1 = \int_0^2 (2-x)e^x dx$.

On pose

$$\left\{\begin{array}{c} u(x) = 2-x \\ v'(x) = e^x \end{array}\right. \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} u'(x) = -1 \\ v(x) = e^x \end{array}\right.$$

donc

$$\begin{aligned} \int_0^2 (2-x)e^x dx &= \left[(2-x)e^x\right]_0^2 - \int_0^2 -e^x dx \\ &= -2 + \int_0^2 e^x dx \\ &= -2 + \left[e^x\right]_0^2 \\ &= -2 + e^2 - 1 = e^2 - 3 \end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $(\forall n \geq 1)$, $0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(e^2-1)$.

Soit $x \in [0,2]$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$.

On a : $0 \leq 2-x \leq 2$ *alors* $0 \leq \dfrac{(2-x)^n}{n!} \leq \dfrac{2^n}{n!}$ *donc* $0 \leq \dfrac{1}{n!}(2-x)^n e^x \leq \dfrac{2^n}{n!}e^x$ *d'où*

$$0 \leq \int_0^2 \frac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx \leq \int_0^2 \frac{2^n}{n!} e^x dx$$

c'est-à-dire $0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}\int_0^2 e^x dx$ *par suite* $0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}\left[e^x\right]_0^2$ *donc*

$$(\forall n \geq 1), 0 \leq I_n \leq \frac{2^n}{n!}(e^2-1).$$

3. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $I_{n+1} = I_n - \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a :* $I_n = \int_0^2 \dfrac{1}{n!}(2-x)^n e^x dx = \dfrac{1}{n!}\int_0^2 (2-x)^n e^x dx$

on pose

$$\begin{cases} u(x) = e^x \\ v'(x) = (2-x)^n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u'(x) = e^x \\ v(x) = \dfrac{-(2-x)^{n+1}}{n+1} \end{cases}$$

alors

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{1}{n!}\left(\left[-e^x.\frac{(2-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 + \int_0^2 e^x \frac{(2-x)^{n+1}}{n+1}dx\right) \\ &= \frac{1}{n!}\left[-e^x.\frac{(2-x)^{n+1}}{n+1}\right]_0^2 + \int_0^2 \frac{(2-x)^{n+1}}{n!(n+1)}e^x dx \\ &= \frac{1}{n!}.\frac{2^{n+1}}{n+1} + \int_0^2 \frac{(2-x)^{n+1}}{(n+1)!}e^x dx \\ &= \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), \; I_{n+1} = I_n - \frac{2^{n+1}}{(n+1)!}$$

4. *Démontrons par récurrence :* $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$

Pour $n=1$, *on a* $1 + \dfrac{2}{1!} + I_1 = e^2$ *donc l'égalité est vraie pour* $n=1$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Supposons que* $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$, *montrons que :* $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!} + I_{n+1}$.

On a

$$\begin{aligned}
e^2 &= 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n\\
&= 1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+\underbrace{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}+I_n\\
&= \left(1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}\right)+I_n-\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}
\end{aligned}$$

et comme $I_{n+1}=I_n-\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}$ *alors* $e^2=1+\dfrac{2}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+...+\dfrac{2^{n+1}}{(n+1)!}+I_{n+1}$.
D'où d'après le principe de récurrence on en déduit que

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\quad e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n$$

MÉTHODE 2 *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$. *Pour tout* $k\in\{0,1,...,n-1\}$ *on a :* $I_{k+1}-I_k=-\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)!}$

$$\begin{cases}
I_1-I_0=-\dfrac{2^1}{1!}\\[2ex]
I_2-I_1=-\dfrac{2^2}{2!}\\[2ex]
I_3-I_2=-\dfrac{2^3}{3!}\\[2ex]
I_4-I_3=-\dfrac{2^4}{4!}\\
\qquad\vdots\\
I_n-I_{n-1}=-\dfrac{2^n}{n!}
\end{cases}$$

en sommant ces égalités

$$(\cancel{I_1}-I_0)+(\cancel{I_2}-\cancel{I_1})+(I_3-\cancel{I_2})+...+(I_n-\cancel{I_{n-1}})=-\left(\frac{2^1}{1!}+\frac{2^2}{2!}+\frac{2^3}{3!}+...+\frac{2^n}{n!}\right)$$

en simplifiant on obtient : $-I_0+I_n=-\left(\dfrac{2^1}{1!}+\dfrac{2^2}{2!}+\dfrac{2^3}{3!}+...+\dfrac{2^n}{n!}\right)$ *et comme* $I_0=e^2-1$ *donc*

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\,,\ e^2=1+\frac{2}{1!}+\frac{2^2}{2!}+...+\frac{2^n}{n!}+I_n$$

5. *On pose pour tout entier naturel* $n\geq 1$, $u_n=\dfrac{2^n}{n!}$

a) *Calculons* $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on a* $u_n \neq 0$ *alors*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \frac{2^{n+1}}{(n+1)!} \times \frac{n!}{2^n} = \frac{2}{n+1}$$

Montrons que : $(\forall n \geq 3)\,,\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$

Soit $n \geq 3$, *on a*

$$n+1 \geq 4 \iff \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{4} \iff \frac{2}{n+1} \leq \frac{1}{2}$$

et comme $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{2}{n+1}$ *alors* $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ *donc*

$$(\forall n \geq 3)\,,\ u_{n+1} \leq \frac{1}{2}u_n$$

b) *Déduisons que* : $(\forall n \geq 3)\,,\ 0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$.

Pour $n = 3$ *on a* $u_3 = \frac{8}{6}$ *donc* $0 \leq u_3 \leq u_3$.

Soit $n \geq 3$. *Supposons que* $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$, *montrons que* $0 \leq u_{n+1} \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

On a $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *et* $0 \leq \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}$ *alors*

$$0 \leq u_n \times \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

donc : $0 \leq u_{n+1} \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

D'où d'après le principe de récurrence on en déduit que

$$(\forall n \geq 3)\,, 0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}.$$

c) *Déduisons que* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n$:

On a $0 \leq u_n \leq u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$ *et comme* $-1 < \frac{1}{2} < -1$ *alors* $\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_3 \left(\frac{1}{2}\right)^{n-3} = 0$.

D'après le théorème de la limite par encadrement on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$$

Déduisons : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n$:

On a : $0 \leq I_n \leq \dfrac{2^n}{n!}(e^2 - 1)$ *et comme* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \dfrac{2^n}{n!}(e^2 - 1) = 0$.
Donc

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0$$

6. *Justifions que* $e^2 = \lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!}\right)$:

   On a $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $e^2 = 1 + \dfrac{2}{1!} + \dfrac{2^2}{2!} + ... + \dfrac{2^n}{n!} + I_n$, *et comme* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} I_n = 0$, *donc par passage à la limite, on obtient :*

$$e^2 = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + ... + \frac{2^n}{n!}\right)$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com