CORRECTION EXAMEN 2020 (RATTRAPAGE)

EXERCICE 1 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 1 \\ (\forall n \in \mathbb{N}), \quad u_{n+1} = \dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5} \end{cases}$

1. *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}), u_n < 2$.

   Pour $n = 0$ *on a* $u_0 = 1$ *donc* $u_0 < 2$.

   Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $u_n < 2$ *et montrons que* $u_{n+1} < 2$.

   On a

$$\begin{aligned} u_{n+1} - 2 &= \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2 \\ &= \frac{3u_n - 8 - 4u_n + 10}{2u_n - 5} \\ &= \frac{-u_n + 2}{2u_n - 5} \\ &= \frac{-(u_n - 2)}{2u_n - 5} \end{aligned}$$

   comme $u_n < 2$ *alors* $\dfrac{-(u_n - 2)}{2u_n - 5} < 0$, *donc* $u_{n+1} < 2$.

   Ainsi d'après le principe de récurrence on conclut que

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n < 2.$$

2. *On pose pour tout* $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \dfrac{u_n - 3}{u_n - 2}$.

   a) *Montrons que* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une arithmétique de raison* 2.

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
&= \frac{\dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 3}{\dfrac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
&= \frac{3u_n - 7}{u_n - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
&= \frac{3u_n - 7 - (u_n - 3)}{u_n - 2} \\
&= \frac{2u_n - 4}{u_n - 2} \\
&= \frac{2(u_n - 2)}{u_n - 2} \\
&= 2
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ v_{n+1} - v_n = 2$$

ceci signifie que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison 2.

b) *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de premier terme $v_0 = 2$ et de raison $r = 2$. On sait que pour tout entier naturel n*

$$v_n = v_0 + nr$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ v_n = 2 + 2n$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
v_n &= \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n(u_n - 2) = u_n - 3 \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n u_n - 2v_n = u_n - 3 \\
\Longleftrightarrow & \quad v_n u_n - u_n = 2v_n - 3 \\
\Longleftrightarrow & \quad u_n(v_n - 1) = 2v_n - 3 \\
\Longleftrightarrow & \quad u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1} = \frac{2(2 + 2n) - 3}{2 + 2n - 1} = \frac{4n + 1}{2n + 1}
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N}), \ u_n = \frac{4n + 1}{2n + 1}$$

c) *Calculons* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})$, $u_n = \dfrac{4n+1}{2n+1}$, *donc*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4n+1}{2n+1} = \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{4 + \dfrac{1}{n}}{2 + \dfrac{1}{n}} = 2 \ car \lim_{n \longrightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

EXERCICE 2 .

1. *On résout dans* $\mathbb{C}$ *l'équation suivante* (E) : $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

   Calculons Δ :

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 2 - 4 = -2 \prec 0 \end{aligned}$$

   l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : z_1 *et* z_2.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{-(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

   et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. *Donc*

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

2. *On pose* : $a = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

   a)

   - *La forme trigonométrique du nombre complexe* : a.

     Le module de a :

$$|a| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

     Donc

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

- *On déduit que :* $a^{2020} \in \mathbb{R}$.

  On d'après la formule de moivre on a

$$\begin{aligned} a^{2020} &= \cos\left(\frac{2020\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2020\pi}{4}\right) \\ &= \cos(505\pi) + i\sin(505\pi) \\ &= \cos(\pi + 504\pi) + i\sin(\pi + 504\pi) \\ &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) \\ &= \cos(\pi) = -1 \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

b) *Soit le nombre complexe* $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. *Montrons que :* $b^2 = a$.

On a

$$b^2 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})^2 = \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8}) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = a$$

3. **a)** *Vérifions que :* $z' = bz$.

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ *transforme le point* $M(z)$ *en* $M'(z')$.
C'est-à-dire : $R(M) = M'$ *donc*

$$R(M) = M' \iff z' - o = e^{i\frac{\pi}{8}}(z - o) \iff z' = e^{\frac{\pi}{8}i}z$$

et comme $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = e^{i\frac{\pi}{8}}$, *d'où*

$$z' = bz.$$

b)

- *On cherche l'image de C par R.*

  Notons C′ l'image de C par R, c'est-à-dire $R(C) = C'$ *donc*

$$c' = bc = b \times 1 = b$$

  ce qui signifie que l'image de C par R est B.

- *Montrons que A est l'image de B.*

  Notons B′ l'image de B par R. C'est-à-dire : $R(B) = B'$ *donc*

$$b' = bb = b^2 = a$$

  ce qui signifie que l'image de B par R est A.

4. **a)** *Montrons que :* $|a - b| = |b - c|$.

On a

$$|a - b| = \left|b^2 - b\right| = |b(b-1)| = |b|\,|b - 1| = |b - 1|, \text{ car : } |b| = \left|e^{i\frac{\pi}{8}}\right| = 1.$$

et

$$|b-c| = |b-1|$$

donc

$$|a-b| = |b-c|\,.$$

- *La nature du triangle ABC.*
  On a $|a-b| = |b-c|$, c'est équivaut à $AB = BC$. Ceci signifie que le triangle ABC est isocèle en B.

b) *La mesure d'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$:

On a

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{1-b}{b^2-b}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{-(b-1)}{b(b-1)}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{-1}{b}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg(-1) - \arg(b)\,[2\pi] \\
&\equiv \pi - \frac{\pi}{8}\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{7\pi}{8}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

Donc, $\dfrac{7\pi}{8}$ *est une mesure de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}\right)$.

5. *Soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$.*

a) *Vérifions que : $d = b^2 + 1$.*
On a D est l'image de A par T, c'est-à-dire : $T_{\overrightarrow{u}}(A) = D$.

$$\begin{aligned}
T_{\overrightarrow{u}}(A) &= D \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u} \\
&\iff z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{u}} \\
&\iff d - a = 1 \\
&\iff d = a + 1 \\
&\iff d = b^2 + 1
\end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $\dfrac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$.
On a

$$\frac{b^2+1}{b} = \frac{b^2}{b} + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{8}}} = b + \frac{e^{-i\frac{\pi}{8}}}{1} = b + \overline{b}$$

- *On déduit que les points O, B et D sont alignés.*

  On a

$$\frac{d-o}{b-o} = \frac{b^2+1}{b} = b+\bar{b} = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}) + (\cos(-\frac{\pi}{8}) + i\sin(-\frac{\pi}{8})) = 2\cos\frac{\pi}{8} \in \mathbb{R}$$

  Ce qui signifie que les points O, B et D sont alignés.

EXERCICE 3 .

On considère la fonction numérique u définie sur $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$.

1. **a)** *Montrons que : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $u'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x}$.*

La fonction u est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} u'(x) &= \left(e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}\right)' \\ &= e^x - 2 + 3e^{-x} \\ &= e^x - 2 + \frac{3}{e^x} \\ &= \frac{e^{2x} - 2e^x + 3}{e^x} \\ &= \frac{(e^x)^2 - 2e^x + 1 + 2}{e^x} \\ &= \frac{(e^x-1)^2+2}{e^x} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad u'(x) = \frac{(e^x-1)^2+2}{e^x}.$$

b) *Le tableau de variation de la fonction u*

On a $(\forall x \in \mathbb{R})$, $u'(x) = \dfrac{(e^x-1)^2+2}{e^x} > 0$, ceci signifie que la fonction u est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Donc

x	$-\infty$	$+\infty$
$u'(x)$	$+$	
u	$\nearrow$	

c) *On déduit le signe de la fonction u sur $\mathbb{R}$.*
On a $u(0) = 0$, alors

$$x \in [0, +\infty[\implies x \geq 0 \underbrace{\implies}_{u \text{ est stric } \nearrow} u(x) \geq u(0) \implies u(x) \geq 0$$

et

$$x \in]-\infty, 0] \implies x \leq 0 \underbrace{\implies}_{u \text{ est stric } \nearrow} u(x) \leq u(0) \implies u(x) \leq 0$$

donc $(\forall x \in [0, +\infty[),\ \ u(x) \geq 0$ *et* $(\forall x \in]-\infty, 0]),\ \ u(x) \leq 0.$

2. *Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :* $v(x) = e^{2x} - 2xe^{x} + 2e^{x} - 3$

a) *Vérifions que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ v(x) = e^{x}u(x).$
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} e^{x}u(x) &= e^{x}\left(e^{x} - 2x + 2 - 3e^{-x}\right) \\ &= e^{2x} - 2xe^{x} + 2e^{x} - 3 \\ &= v(x) \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R}),\ v(x) = e^{x}u(x).$

b) *Le signe de la fonction v sur $\mathbb{R}$.*
On a $(\forall x \in \mathbb{R}),\ e^{x} > 0$ *donc le signe de $v(x)$ sur $\mathbb{R}$ est le même que celui de $u(x)$.*

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$e(x)$	$+$	|	$+$
$u(x)$	$-$	0	$+$
$v(x)$	$-$	0	$+$

3. **a)** *Montrons que la fonction W est une primitive de la fonction v sur $\mathbb{R}$.*
La fonction W est dérivable sur $\mathbb{R}$.
Soit $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned} W'(x) &= \left(\frac{1}{2}e^{2x} + (4 - 2x)e^{x} - 3x\right)' \\ &= \frac{1}{2} \times 2e^{2x} - 2e^{x} + (4 - 2x)e^{x} - 3 \\ &= e^{2x} - 2e^{x} + 4e^{x} - 2xe^{x} - 3 \\ &= e^{2x} + 2e^{x} - 2xe^{x} - 3 \\ &= v(x) \end{aligned}$$

donc $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ W'(x) = v(x)\,.$

D'où la fonction $W : x \longmapsto \frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)\,e^{x} - 3x$ *est une primitive de la fonction* v *sur* $\mathbb{R}$.

b) *Calculons* $\displaystyle\int_0^2 v(x)\,dx$:

On a

$$\begin{aligned}\int_0^2 v(x)\,dx &= [W(x)]_0^2\\ &= W(2) - W(0)\\ &= \frac{1}{2}e^4 - \frac{21}{2}\end{aligned}$$

c) *Montrons que* $\frac{9}{2}$ *est le minimum absolu de la fonction* W *sur* $\mathbb{R}$.

On a $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ W'(x) = v(x)$, *et d'après la question* $2-b$ *d'où le tableau de variation de la fonction* W *sur* $\mathbb{R}$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$W'(x)$		$-$	0	$+$	
W		$\searrow$	$\frac{9}{2}$	$\nearrow$	

on déduit que $\frac{9}{2}$ *est la valeur minimale absolue de la fonction* W *sur* $\mathbb{R}$.

EXERCICE 4 .

I- *Soit* g *la fonction numérique définie sur* $]0,+\infty[$ *par :* $g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2$

1) *Montrons que :* $g'(x) < 0$ *pout tout* $x \in\,]0,+\infty[\,.$

Les fonctions $u : x \longmapsto e^{1-x}$ *et* $v : x \longmapsto \frac{1}{x} - 2$ *sont dérivables sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction* $g = u+v$ *est dérivabe sur* $]0,+\infty[\,.$

Soit $x \in\,]0,+\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned}g'(x) &= \left(e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)'\\ &= -e^{1-x} - \frac{1}{x^2}\\ &= -\left(e^{1-x} + \frac{1}{x^2}\right)\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in\,]0,+\infty[)\,,\ g'(x) < 0$$

2) *On déduit le tableau de signe de* $g(x)$ *sur* $]0,+\infty[$.
On a

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$			$-$		
g		$\searrow$	0	$\searrow$	

on a

$$x \in]0,1] \Longrightarrow 0 < x \leq 1 \Longrightarrow g(x) \geq g(1) \implies g(x) \geq 0$$

et

$$x \in [1,+\infty[\Longrightarrow x \geq 1 \Longrightarrow g(x) \leq g(1) \implies g(x) \leq 0$$

donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$	0	$-$	

II- *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $]0,+\infty[$ *par :*

$$f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$$

1) *Montrons que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} (1-x)e^{1-x} = e^1$, $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -x^2 + 5x - 3 = -3$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -2\ln x = +\infty$, *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

La courbe (C) *admet une asymptote verticale d'équation* $x = 0$.

2) a) *Montrons que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

On pose $X = 1-x$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} (1-x)e^{1-x} = \lim\limits_{X\longrightarrow -\infty} Xe^X = 0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -x^2 + 5x - 3 = \lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -x^2 = -\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} -2\ln x = -\infty$. *Donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

b) *Montrons que :* $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{(1-x)e^{1-x}-x^2+5x-3-2\ln x}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1-x}{x}\right)e^{1-x}+\frac{-x^2+5x-3}{x}-\frac{2\ln x}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{1-x}+\frac{-x^2+5x-3}{x}-\frac{2\ln x}{x}
\end{aligned}$$

comme $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\left(\frac{1}{x}-1\right)e^{1-x} = 0$, $\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2+5x-3}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{-x^2}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} -x = -\infty$ *et* $\lim_{x\longrightarrow+\infty} -\frac{2\ln x}{x} = 0$. *Donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}\frac{f(x)}{x} = -\infty$$

La courbe (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.

3) a) *Montrons que :* $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ \ f'(x)=(x-2)\,g(x)\,.$
La fonction f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$.
Soit $x\in\,]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left((1-x)e^{1-x}-x^2+5x-3-2\ln x\right)'\\
&= -e^{1-x}-(1-x)e^{1-x}-2x+5-\frac{2}{x}\\
&= -e^{1-x}-e^{1-x}+xe^{1-x}-2x+5-\frac{2}{x}\\
&= -2e^{1-x}+xe^{1-x}-2x+5-\frac{2}{x}\\
&= \frac{-2xe^{1-x}+x^2e^{1-x}-2x^2+5x-2}{x}\\
&= \frac{xe^{1-x}(x-2)-(2x-1)(x-2)}{x} \qquad / \ -2x^2+5x-2=-(2x-1)(x-2)\\
&= \frac{(x-2)\left(xe^{1-x}-(2x-1)\right)}{x}\\
&= (x-2)\left(e^{1-x}+\frac{1}{x}-2\right)\\
&= (x-2)\,g(x)
\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ \ f'(x)=(x-2)\,g(x)$$

b) *On a* $f'(x)=(x-2)\,.g(x)$, *d'après la question 2 partie 1, on déduit le signe de*

$f'(x)$ *sur* $]0,+\infty[$

x	0		1		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

ceci signifie que la fonction f *est décroissante sur* $]0,1]$ *et sur* $[2,+\infty[$ *et croissante sur* $[1,2]$.

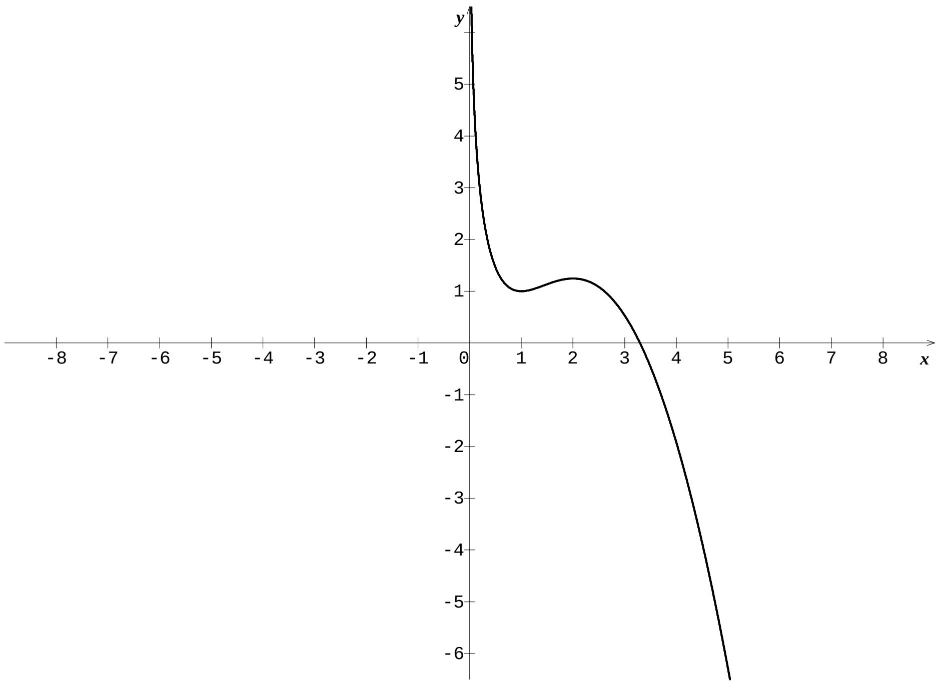
c) *La tableau de variations de* f *sur* $]0,+\infty[$.

x	0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	1,25	$\searrow$	$-\infty$

4) *Montrons que l'équation* $f(x)=0$ *admet unqiue solution sur* $]3,4[$.

La fonction f *est continue et strictement décroissante sur* $[3,4]$ *et comme* $f(3)\times f(4)<0$, *donc d'après T.V.I l'équation* $f(x)=0$ *admet unique solution dans l'intervalle* $]3,4[$.

5) *On construit la courbe* (C) *dans un repère orthonormé* $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



III- *On pose* $h(x) = f(x) - x$ *pour tout* $x \in [1,2]$.

1) a) *Montrons que :* $(\forall x \in [1,2])\,,\ f(x) \leq x$

On a

x	1	2
h	0 $\searrow$	$h(2)$

Sur l'intervalle $[1,2]$ *la fonction* h *admet un maximum atteint pour* $x = 0$. *Donc*

$$h(x) \leq 0.$$

Or $h(x) \leq 0$ *c'équivaut à* $f(x) \leq x$. *D'où*

$$(\forall x \in [1,2])\,, f(x) \leq x$$

b) *Montrons que* 1 *est l'unique solution de l'équation* $f(x) = x$ *sur* $[1,2]$.

On a la fonction h *est continue et strictement décroissante sur* $[1,2]$ *et comme* $0 \in h([1,2])$, *donc l'équation* $h(x) = 0$ *admet unique solution dans l'intervalle* $[1,2]$, *et comme* $h(1) = 0$ *alors* 1 *est l'unique solution de l'équation* $h(x) = 0$ *sur* $[1,2]$.

2) *Soit* (u_n) *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0 = 2 \\ (\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = 2$ *donc* $1 \leq u_0 \leq 2$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *On suppose que* $1 \leq u_n \leq 2$, *montrons que :* $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a

$$1 \leq u_n \leq 2 \quad \underbrace{\Longrightarrow}_{f\ est\ \nearrow\ sur\ [1,2]} \quad f(1) \leq f(u_n) \leq f(2)$$

et comme $f(x) \leq x$ *pour tout* $x \in [1,2]$ *alors* $f(2) \leq 2$ *donc* $1 \leq u_{n+1} \leq 2$. *D'où*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \leq u_n \leq 2$$

b) *Montrons que la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

On a pour tout $x \in [1,2]$, $f(x) \leq x$ *et comme* $u_n \in [1,2]$, *donc* $f(u_n) \leq u_n$ *d'où*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\quad u_{n+1} \leq u_n$$

Ce qui montre que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

c) *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante. et comme elle est minorée par* 1, *alors elle est convergente.*

Calculons $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est définie par :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\, u_{n+1} = f(u_n)$ *telle que* $u_0 \in [1,2]$.
On a f *est continue sur* $[1,2]$ *et* $f([1,2]) \subset [1,2]$ *et comme la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et sa limite* ℓ $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell\right)$ *est une solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[1,2]$.
Puisque 1 *est l'unique solution de l'équation* $f(x) = x$ *sur* $[1,2]$, *donc*

$$\lim_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 1.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com