CORRECTION EXAMEN 2021

EXERCICE 1 .

1. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* : $e^{2x}-4e^{x}+3=0$.
Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$e^{2x}-4e^{x}+3=0 \iff (e^{x})^{2}-4e^{x}+3=0$$

on pose $X=e^{x}$ *alors l'équation devient* $X^{2}-4X+3=0$.
Puisque $\Delta=4$, *donc l'équation admet deux solutions réelles distinctes*

$$\begin{aligned} X &= \frac{4+2}{2\times 1} \quad ou \quad X=\frac{4-2}{2\times 1} \\ &\iff X=3 \quad ou \quad X=1 \\ &\iff e^{x}=3 \quad ou \quad e^{x}=1 \\ &\iff x=\ln(3) \quad ou \; x=0 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S=\{0,\ln(3)\}$$

b) *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* : $(I): e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0$
On pose $X=e^{x}$, *on obtient*

$$e^{2x}-4e^{x}+3\leq 0 \iff X^{2}-4X+3\leq 0$$

comme $\Delta=4$ *alors le signe de* $X^{2}-4X+3$ *est* :

X	$-\infty$		1		3		$+\infty$
X^2-4X+3		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc

$$\begin{aligned} X^{2}-4X+3 &\leq 0 \\ &\iff X\in[1,3] \\ &\iff 1\leq X\leq 3 \\ &\iff 1\leq e^{x}\leq 3 \\ &\iff 0\leq x\leq \ln 3 \\ &\iff x\in[0,\ln 3] \end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S=[0,\ln 3]$$

c) *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{x}-3)}{(e^{x})^{2}-1} \quad / \quad e^{2x}-4e^{x}+3=(e^{x}-1)(e^{x}-3)\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{(e^{x}-1)(e^{x}-3)}{(e^{x}-1)(e^{x}+1)} \quad / \quad (e^{x})^{2}-1=(e^{x}-1)(e^{x}+1)\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{x}-3}{e^{x}+1}=\frac{1-3}{1+1}=-1\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{e^{2x}-4e^{x}+3}{e^{2x}-1}=-1$$

2. *Montrons que l'équation* $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ *admet une solution dans* $[-1,0]$:

   On considère la fonction f *définie par :* $f(x)=e^{2x}+e^{x}+4x.$

   ♣ *Les fonctions* $u:x\longmapsto e^{2x}$, $v:x\longmapsto e^{x}$ *et* $w:x\longmapsto 4x$ *sont continues sur* $[-1,0]$ *donc la fonction* $f=u+v+w$ *est continue sur* $[-1,0]$.

   ♣ *On a :* $f(-1)=e^{-2}+e^{-1}-4$ *et* $f(0)=2$ *donc* $f(-1)\times f(0)<0.$

   Donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x)=0$ *admet une solution dans* $[-1,0]$. *D'où l'équation* $e^{2x}+e^{x}+4x=0$ *admet une solution dans* $[-1,0]$.

EXERCICE 2 .

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *la suite numérique définie par :* $\begin{cases} u_0=\dfrac{1}{2}\\ u_{n+1}=\dfrac{u_n}{3-2u_n}\end{cases}$.

1. *Calculons* u_1 :

   On a : $u_1=\dfrac{u_0}{3-2u_0}=\dfrac{\frac{1}{2}}{3-2\times\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{4}$, *donc* $u_1=\dfrac{1}{4}$.

2. *Montrons que :* $(\forall n\in\mathbb{N})$, $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$.

   Pour $n=0$, *on a* $u_0=\dfrac{1}{2}$ *donc* $0<u_0\leq\dfrac{1}{2}$.

   Soit $n\in\mathbb{N}$. *Supposons que* $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$, *montrons que :* $0<u_{n+1}\leq\dfrac{1}{2}$.

   On a : $0<u_n\leq\dfrac{1}{2}$ *alors* $2\leq 3-2u_n<3$ *par suite* $\dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{3-2u_n}\leq\dfrac{1}{2}$ *donc*

$$0\times\frac{1}{3}<u_n\times\frac{1}{3-2u_n}\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$$

d'où : $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{4}$ *et comme* $\dfrac{1}{4} \leq \dfrac{1}{2}$ *donc* $0 < u_{n+1} \leq \dfrac{1}{2}$.

D'où d'après le principe de récurrence

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad 0 < u_n \leq \frac{1}{2}.$$

3. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_n \neq 0$ *puis*

$$\begin{aligned}\frac{u_{n+1}}{u_n} &= \frac{\frac{u_n}{3-2u_n}}{u_n} \\ &= \frac{u_n}{u_n\,(3-2u_n)} \\ &= \frac{1}{3-2u_n}\end{aligned}$$

et comme $0 < u_n \leq \dfrac{1}{2}$ *alors* $\dfrac{1}{3} < \dfrac{1}{3-2u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}.$$

b) *On déduit la monotonie de la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

On a : $(\forall n \in \mathbb{N})\,, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ *et comme* $\dfrac{1}{2} < 1$ *alors* $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} < 1$ *donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ u_{n+1} \leq u_n$$

ceci signfie que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

4. **a)** *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ 0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$.

Pour $n = 0$, *on a* $u_0 = \dfrac{1}{2}$ *donc* $0 < u_0 \leq \dfrac{1}{2}$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons que* $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$, *montrons que :* $0 < u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

On a : $0 < u_n \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$ *et* $0 < \dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{1}{2}$ *alors*

$$0 < u_n \times \frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

donc : $0 < u_{n+1} \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$.

D'où d'après le principe de récurrence on déduit que

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad 0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

Calculons : $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} u_n$ *:*

On a $0 < u_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ *et comme* $-1 < \frac{1}{2} < 1$ *alors* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = 0$.
D'après le théorème de la limite par encadrement on déduit que

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$$

b) *On pose* $v_n = \ln(3 - 2u_n)$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, Calculons* $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} v_n$ *:*

On a $\lim\limits_{n \longrightarrow +\infty} 3 - 2u_n = 3$ *et puisque la fonction* $\ln$ *est continue en* 3 *alors*

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} v_n = \ln 3$$

5. **a)** *Vérifions que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right).$

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a*

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - 1 &= \frac{1}{\frac{u_n}{3 - 2u_n}} - 1 \\ &= \frac{3 - 2u_n}{u_n} - 1 \\ &= \frac{3 - 2u_n - u_n}{u_n} \\ &= \frac{3 - 3u_n}{u_n} \\ &= 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right) \end{aligned}$$

donc

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad \frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right).$$

b) *On déduit* u_n *en fonction de* n

Soit $n \in \mathbb{N}$*, on a :* $\frac{1}{u_{n+1}} - 1 = 3\left(\frac{1}{u_n} - 1\right)$.

On pose $w_n = \frac{1}{u_n} - 1$ *alors* $w_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}} - 1$*, donc*

$$(\forall n \in \mathbb{N})\,, \quad w_{n+1} = 3w_n$$

ceci signifie que la suite $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *est géométrique de raison* 3 *et de premier terme* $w_0 = 1$.

$$Donc\ w_n = 3^n w_0 \ \ , par\ suite\ \frac{1}{u_n} - 1 = 3^n,\ alors\ \frac{1}{u_n} = 3^n + 1,\ d'où$$

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ u_n = \frac{1}{3^n + 1}$$

EXERCICE 3 .

1. *Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation :* $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$.

   On a $\Delta = \left(-\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 1 \times 1 = -1$, *donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées* z_1 *et* z_2 :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{3} + i}{2}$$

   et $z_2 = \overline{z_1} = \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)} = \frac{\sqrt{3} - i}{2}$. *D'où l'ensemble des solutions est :*

$$S = \left\{\frac{\sqrt{3} - i}{2}, \frac{\sqrt{3} + i}{2}\right\}$$

2. *Soient les nombres complexes* $a = e^{i\frac{\pi}{6}}$ *et* $b = \frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$

   a) *La forme algébrique de a :*

   On $a : a = e^{i\frac{\pi}{6}} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$. *Donc*

$$a = \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}$$

   b) *Vérifions que :* $\overline{a}b = \sqrt{3}$

   On a

$$\begin{aligned}
\overline{a}b &= \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)}\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \\
&= \frac{3\sqrt{3}}{4} + i\frac{3}{4} - i\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} \\
&= \sqrt{3}
\end{aligned}$$

   donc : $\overline{a}b = \sqrt{3}$.

3. *Montrons que le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O dont on déterminera le rapport :*

   On a

$$\overline{a}b = \sqrt{3} \iff \underbrace{\overline{a}a}_{=1} b = \sqrt{3}a \iff b = \sqrt{3}a \iff \overrightarrow{OB} = \sqrt{3}\overrightarrow{OA}$$

   d'où le point B est l'image du point A par une homothétie h de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.

4. *Soient z l'affixe d'un point M et z' l'affixe d'un point M' par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.*

   a) *On écrit z' en fonction de z et a*

   On a

$$\begin{aligned} R(M) = M' &\iff z' - a = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) \\ &\iff z' = e^{i\frac{\pi}{2}}(z-a) + a \\ &\iff z' = i(z-a) + a \end{aligned}$$

   donc : $z' = i(z-a) + a$.

   b) *Montrons que : $d = a + 1$*

   On a

$$R(C) = D \iff d = i(c-a) + a \iff d = i(\overline{a} - a) + a$$

   et comme : $\overline{a} - a = \overline{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)} - \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\frac{i}{2} - \frac{i}{2} = -i$ *donc*

$$d = i \times (-i) + a = a + 1$$

   c) *Montrons que $ADIO$ est un losange.*

   Pour montrer que $ADIO$ est un losange, il suffit de montrer que le quadrilatère a quadtre cotés de même longueur.

   On a : $AD = |d-a| = |a+1-a| = 1$, $DI = |1-(a+1)| = |-a| = \left|-e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$, $OI = |1-0| = 1$ *et* $AO = \left|0 - e^{i\frac{\pi}{6}}\right| = 1$. *Donc*

$$AD = DI = OI = AO$$

   d'où le quadrilatère $ADIO$ est un losange.

5. **a)** *Vériifions que :* $d-b=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$

On a

$$\begin{aligned} d-b &= a+1-\left(\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+1-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}+\frac{i}{2}\left(1-\sqrt{3}\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{i}{2}\left(\sqrt{3}-1\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i) \end{aligned}$$

donc

$$d-b=\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)$$

On déduit un argument du nombre $d-b$ *:*
On a

$$\begin{aligned} \arg(d-b) &\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-i)\right)[2\pi]\\ &\equiv \arg\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)+\arg(1-i)\,[2\pi] \end{aligned}$$

comme : $\arg(1-i)\equiv-\dfrac{\pi}{4}\,[2\pi]$ *et* $\arg\left(\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}\right)\equiv 0\,[2\pi]$, *donc*

$$\arg(d-b)\equiv\frac{-\pi}{4}\,[2\pi]$$

b) *La forme trigonométrique du nombre* $1-b$ *:*

On a

$$\begin{aligned}
1-b &= 1-\left(\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\
&= 1-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\\
&= -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\pi}{3}\right)\\
&= \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)
\end{aligned}$$

donc

$$1-b=\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)$$

c) *On déduit une mesure de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}}\right)$:

On a

$$\begin{aligned}
\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}\right) &\equiv \arg\left(\frac{d-b}{1-b}\right)[2\pi]\\
&\equiv \arg(d-b)-\arg(1-b)\,[2\pi]\\
&\equiv -\frac{\pi}{4}-\frac{4\pi}{3}\,[2\pi]\\
&\equiv \frac{-19\pi}{12}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

donc

$$\left(\overrightarrow{BI},\overrightarrow{BD}\right)\equiv\frac{-19\pi}{12}\,[2\pi]$$

EXERCICE 4 .

Soit la fonction f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=2x\ln x-2x, & x>0\\ f(0)=0 \end{cases}$

1. *Montrons que* f *est continue à droite au point* 0.

   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} 2x\ln x=0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} -2x=0$, *donc par somme on obtient*

$$\lim_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=0=f(0)$$

   d'où la fonction f *est continue à droite au point* 0.

2. **a)** *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 2x\ln x-2x\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 2x(\ln x-1)=+\infty\end{aligned}$$

car : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \ln x-1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 2x=+\infty$.

b) *Calculons* : $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2x\ln x-2x}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} 2\ln x-2=+\infty\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x}=+\infty$$

La courbe (C) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$.

3. **a)** *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \dfrac{f(x)}{x}$:

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow0^+} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow0^+} \frac{2x\ln x-2x}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow0^+} 2\ln x-2=-\infty\end{aligned}$$

donc

$$\lim_{x\longrightarrow0^+} \frac{f(x)}{x}=-\infty$$

On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \dfrac{f(x)}{x}=-\infty \iff \lim\limits_{x\longrightarrow0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=-\infty$, *ceci signifie que la fonction* f *n'est pas dérivable à droite au point* 0. *Donc la courbe* (C) *admet une demi-tangente verticale à droite au point* $O(0,0)$ *dirigée vers le bas.*

b) *Calculons* $f'(x)$ *pour tout* $x\in\,]0,+\infty[$:

Les fonctions $u : x\longmapsto 2x\ln x$ *et* $v : x\longmapsto -2x$ *sont dérivable sur* $]0,+\infty[$ *donc la fonction* $f=u+v$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$.

Soit $x\in\,]0,+\infty[$, *on a*

$$\begin{aligned}f'(x) &= (2x\ln x-2x)'\\ &= 2\ln x+2x\times\frac{1}{x}-2\\ &= 2\ln x+2-2\\ &= 2\ln x\end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ f'(x) = 2\ln x$$

c) *Le tableau de variations de la fonction f sur $]0,+\infty[$:*

On a : $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ f'(x) = 2\ln x$, donc le signe de $f'(x)$ sur $]0,+\infty[$ est le même que celui de $\ln x$.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	-2	$\nearrow$	$+\infty$

4. **a)** *Résolvons dans $]0,+\infty[$ les équations $f(x) = 0$ et $f(x) = x$.*

♣ *Soit $x \in]0,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow 2x\ln x - 2x = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2x(\ln x - 1) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x - 1 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x = 1 \\ &\Longleftrightarrow x = e \end{aligned}$$

et comme $e \in]0,+\infty[$ donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \{e\}$$

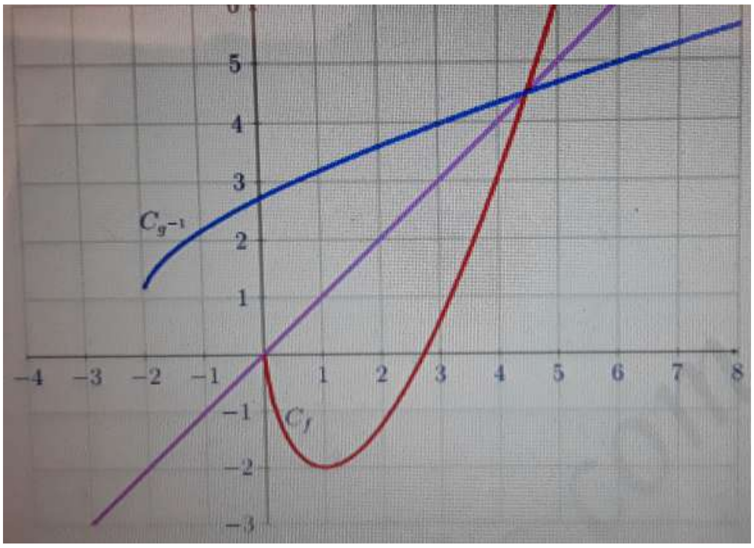
♣ *Soit $x \in]0,+\infty[$, on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ &\Longleftrightarrow 2x\ln x - 2x = x \\ &\Longleftrightarrow 2x\ln x - 3x = 0 \\ &\Longleftrightarrow x(2\ln x - 3) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 2\ln x - 3 = 0 \\ &\Longleftrightarrow \ln x = \frac{3}{2} \\ &\Longleftrightarrow x = e^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

et comme $e^{\frac{3}{2}} \in]0,+\infty[$, donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \left\{ e^{\frac{3}{2}} \right\}$$

b) *La courbe* (C) *dans un repère orthonormé* $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.



5. **a)** *Montrons que :* $\displaystyle\int_1^e x\ln x dx = \frac{1+e^2}{4}$.

En utilisant une intégration par parties, on pose

$$\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x \end{cases} \implies \begin{cases} u'(x) = \dfrac{1}{x} \\ v(x) = \dfrac{x^2}{2} \end{cases}$$

donc

$$\begin{aligned}
\int_1^e x\ln x dx &= \left[\ln x.\frac{x^2}{2}\right]_1^e - \int_1^e \frac{x}{2}dx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\int_1^e xdx \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} \\
&= \frac{e^2+1}{4}
\end{aligned}$$

b) *Déduire* $\displaystyle\int_1^e f(x)\,dx$:

On a

$$\begin{aligned}
\int_1^e f(x)\,dx &= \int_1^e 2x\ln x - 2xdx \\
&= \int_1^e 2x\ln xdx - \int_1^e 2xdx \\
&= 2\int_1^e x\ln xdx - 2\int_1^e xdx \\
&= 2\times\frac{e^2+1}{4} - 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^e \\
&= \frac{e^2+1}{2} - 2\left(\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{e^2+1}{2} - \left(e^2-1\right) \\
&= \frac{3-e^2}{2}
\end{aligned}$$

donc

$$\int_1^e f(x)\,dx = \frac{3-e^2}{2}$$

6. **a)** *D'après le tableau de variations,* -2 *est une valeur minimale de* f *sur* $]0,+\infty[$ *atteinte pour* $x=1$.

   b) *On déduit que :* $(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ \ln x \geq \dfrac{x-1}{x}$.

   Pour tout $x\in\,]0,+\infty[\,,$ *on a*

$$\begin{aligned}
f(x) &\geq -2 \\
&\iff f(x)\geq -2 \\
&\iff 2x\ln x - 2x \geq -2 \\
&\iff 2x\ln x \geq 2x-2 \\
&\iff 2x\ln x \geq 2(x-1) \\
&\iff \ln x \geq \frac{x-1}{x}
\end{aligned}$$

   donc

$$(\forall x\in\,]0,+\infty[)\,,\ln x \geq \frac{x-1}{x}$$

7. *Soit* g *la restriction de la fonction* f *à l'intervalle* $[1,+\infty[\,.$

   a) *Montrons que* g *admet une fonction réciproque* g^{-1}

   Pour tout $x\in[1,+\infty[\,,$ *la fonction* f *est continue et strictement croissante, alors* g *est continue et strictement croissante sur* $[1,+\infty[$ *donc* g *admet une fonction réciproque* g^{-1} *définie sur* J*. Tel que :*

$$J = g([1,+\infty[) = \left[g(1)\,,\lim_{x\longrightarrow+\infty} g(x)\right[= [-2,+\infty[$$

b) *Voir la question* $4-b$.

8. *On considère la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $\begin{cases} h(x) = x^3 + 3x, & x \leq 0 \\ h(x) = 2x\ln x - 2x, & x > 0 \end{cases}$

a) *Étudions la continuité de* h *en* 0.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} 2x\ln x - 2x = 0 = h(0)$, *donc la fonction* h *est continue à droite au point* 0.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} h(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} x^3 + 3x = 0 = h(0)$, *donc la fonction* h *est continue à gauche au point* 0. *D'où* h *est continue au point* 0.

b) *Étudions la dérivabilité de la fonction* h *à gauche au point* 0.

On a

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \longrightarrow 0^-} x^2 + 3 = 3$$

donc la fonction h *est dérivable à gauche au point* 0 *et on a* $h'_g(0) = 3$. *D'où la courbe représentative de la fonction* h *admet une demi-tangente à gauche au point* $O(0,0)$ *définie par* $\begin{cases} y = 3x \\ x \leq 0 \end{cases}$.

c) *On a* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{f(x)}{x} = -\infty$, *donc* h *n'est pas dérivable à droite au point* 0, *ceci signifie que la fonction* h *n'est pas dérivable au point* 0.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**