Correction devoir surveillé N2

Problème d'analyse 1 (13 *points*)

Partie 01 *On considère la fonction numérique h définie sur $\mathbb{R}$ par :* $h(x) = e^{-x} + x - 1$.

1) *La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme la somme de deux fonctions dérivables :* $x \longmapsto e^{-x}$ *et* $x \longmapsto x - 1$. *Calculons ensuite $h'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{aligned} h'(x) &= (e^{-x} + x - 1)' \\ &= -e^{-x} + 1 \end{aligned}$$

étudions maintenant le signe de $h'(x)$ sur $\mathbb{R}$. On résout les inéquations suivantes : $h'(x) \geq 0$ *et* $h'(x) \leq 0$.

•

$$\begin{aligned} h'(x) &\geq 0 \iff -e^{-x} + 1 \geq 0 \\ &\iff -e^{-x} \geq -1 \\ &\iff e^{-x} \leq 1 \\ &\iff -x \leq 0 \\ &\iff x \geq 0 \\ &\iff x \in [0, +\infty[\end{aligned}$$

Ceci signifie que pour tout x de $[0, +\infty[$, on a : $h'(x) \geq 0$. *Donc, la fonction h est croissante sur* $[0, +\infty[$.

•

$$\begin{aligned} h'(x) &\leq 0 \iff -e^{-x} + 1 \leq 0 \\ &\iff -e^{-x} \leq -1 \\ &\iff e^{-x} \geq 1 \\ &\iff -x \geq 0 \\ &\iff x \leq 0 \\ &\iff x \in]-\infty, 0] \end{aligned}$$

Ceci signifie que pour tout x de $]-\infty, 0]$, on a : $h'(x) \leq 0$. *Donc, la fonction h est décroissante sur* $]-\infty, 0]$.

On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

2) *Montrons que $h(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.*

D'apès la question précédente, on déduit que la fonction h admet une valeur minimale en point d'abscisse 0 sur $\mathbb{R}$. Ceci signifie que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a $h(x) \geq h(0)$ et comme $h(0) = 0$, alors :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) \geq 0$$

Partie 02 *On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{x}{x+e^{-x}}$.*

1) *La fonction f est dérivable sur l'ensemble $\mathbb{R}$ comme le rapport de deux fonctions dérivables : $x \longmapsto x$ et $x \longmapsto x + e^{-x}$. Calculons $f'(x)$ pour tout x de $\mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \left(\frac{x}{x+e^{-x}}\right)' \\
&= \frac{x'(x+e^{-x}) - x(x+e^{-x})'}{(x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{(x+e^{-x}) - x(1-e^{-x})}{(x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{x+e^{-x} - x + xe^{-x}}{(x+e^{-x})^2} \\
&= \frac{(x+1)e^{-x}}{(x+e^{-x})^2}
\end{aligned}$$

2) *Etudions le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$.*

On a : $(x+e^{-x})^2 \succ 0$, pour tout x de $\mathbb{R}$. Donc le signe de $f'(x)$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est celui de $(x+1)$. Comme l'expression $x+1$ s'annule en -1. Alors :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	

Ceci implique que :

$$(\forall x \in]-\infty, -1]) : f'(x) \leq 0 \quad \text{et} \quad (\forall x \in [-1, +\infty[) : f'(x) \geq 0$$

On déduit le tableau de variations suivant :

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\frac{-1}{e-1}$	$\nearrow$	1

- *Justification des limites en $+\infty$ et $-\infty$:*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{x+e^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{x(1+\frac{e^{-x}}{x})} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}} = 1$$

$$\text{car} \quad : \quad \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{xe^{x}} = 0$$

et

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{x+e^{-x}} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{x}{x(1+\frac{e^{-x}}{x})} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{xe^{x}}} = 0$$

$$\text{car} \quad : \quad \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1}{xe^{x}} = -\infty, \ \text{et} \ \lim_{x\longrightarrow-\infty} xe^{-x} = 0^{-} \ \text{puisque} \ xe^{x} \prec 0.$$

3) *Vérifions que :* $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - f(x) = \frac{xh(x)}{h(x)+1}$.

$$\begin{aligned} x - f(x) &= x - \frac{x}{x+e^{-x}} \\ &= \frac{x^2 + xe^{-x} - x}{x+e^{-x}} \\ &= \frac{x(e^{-x} + x - 1)}{x+e^{-x}} \\ &= \frac{xh(x)}{x+e^{-x}-1+1} \\ &= \frac{xh(x)}{h(x)+1}. \end{aligned}$$

- *etudions le signe de $x - f(x)$ sur $\mathbb{R}$.*
  On a d'après la partie 01 que pour tout x de $\mathbb{R}$: $h(x) \geq 0$. De plus : $h(x)+1 \geq 1 \succ 0$, Ceci signifie que : $h(x)+1 \succ 0$. Donc, le signe de $x - f(x)$ sur l'ensemble $\mathbb{R}$ est celui de x. D'ou on obtient :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$x-f(x)$	$-$	0	$+$

4) *La position relative de la courbe (C_f) et la droite (Δ) d'équation : $y = x$.*

- *Si $x \in]0, +\infty[$ alors $x - f(x) \succ 0$. Ce qui signifie que la courbe (C_f) est au-dessous de la droite (Δ) d'équation : $y = x$.*
- *Si $x \in]-\infty, 0[$ alors $x - f(x) \prec 0$. Ce qui signifie que la courbe (C_f) est au-dessus de la droite (Δ) d'équation : $y = x$.*
- *La courbe (C_f) et la droite (Δ) se coupent en point d'abscisse 0.*

5) *On considère la (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Montrons que :* $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$.

1. *Initialisation : si* $n = 0$*, on a* $u_0 = 1$ *et comme* $0 \leq u_0 \leq 1$*. Alors l'encadrement est vrai pour* $n = 0$.

   Hérédité : On suppose que $0 \leq u_n \leq 1$*, montrons que :* $0 \leq u_{n+1} \leq 1$.

   On sait que la fonction f *est croissante sur* $[0,1]$*, Donc :*

$$0 \leq u_n \leq 1 \implies f(0) \leq f(u_n) \leq f(1) \implies 0 \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{1+e^{-1}} \leq 1 \implies 0 \leq u_{n+1} \leq 1$$

   Donc, d'après le principe de récurrence on déduit que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 0 \leq u_n \leq 1$$

b) *On sait que pour tout* $x \in [0,1]$*, on a* $x - f(x) \geq 0$*. Comme* $u_n \in [0,1]$*, alors on pose* $x = u_n$ *on aura* $u_n - f(u_n) \geq 0$ *puisque* $f(u_n) = u_{n+1}$*, alors on obtient :* $u_n - u_{n+1} \geq 0$.

$$u_{n+1} - u_n \leq 0$$

Ce qui montre que la suite (u_n) *est décroissante, et puisqu'elle est minorée par* 0*, alors elle est convergente.*

c) *Montrons que :* $\lim_{x \longrightarrow +\infty} u_n = 1$.

On a

- *La suite* (u_n) *est définie par :* $u_{n+1} = f(u_n)$.
- *La fonction* f *est continue sur* $[0,1]$
- $f([0,1]) \subset [0,1]$ *et* $u_0 \in [0,1]$.
- *La suite* (u_n) *est convergente.*

  Donc, la limite de la suite (u_n) *est la solution de l'équation* $f(x) = x$ *dans* $[0,1]$.

  Soit $x \in [0,1]$*, on a*

$$\begin{aligned}
f(x) &= x \iff f(x) - x = 0 \\
&\iff \frac{-xh(x)}{h(x)+1} = 0 \\
&\iff -xh(x) = 0,\ \ /\ h(x)+1 > 0 \text{ pour } x \in [0,1] \\
&\iff x = 0 \ ou\ h(x) = 0 \\
&\iff x = 0 \ ou\ x = 0 \\
&\iff x = 0
\end{aligned}$$

  Ce qui signifie que :

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} u_n = 0$$

EXERCICE 2 (*complexe*)

1. *On résout dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation :* $(E) : 2z^2 + 2z + 5 = 0$.
   Calculons le discriminant Δ *:*

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= 2^2 - 4 \times 2 \times 5 \\ &= 4 - 40 \\ &= -36 \prec 0\end{aligned}$$

   L'équation (E) *admet deux solutions complexes conjuguées* z_1 *et* z_2 *:*

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{-2 + i\sqrt{36}}{4} = \frac{-2 + 6i}{4} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i$$

   et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i)} = \frac{-1}{2} - \frac{3}{2}i$. *Donc*

$$S = \left\{ \frac{-1}{2} + \frac{3}{2}i, \frac{-1}{2} - \frac{3}{2}i \right\}$$

2. *On considère les points* A *,* B *et* C *d'affixes respectives :* $a = 2 - 2i$ *,* $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ *et* $c = 1 - \sqrt{3} + (1 + \sqrt{3})i$

   a) *La forme trigonométrique des deux nombres complexes :* a *et* b.

   - *Le nombre complexe :* $a = 2 - 2i$
     On a : $|a| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. *Donc*

$$a = 2-2i = 2\sqrt{2}(\frac{2}{2\sqrt{2}} - i\frac{2}{2\sqrt{2}}) = 2\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2\sqrt{2}(\cos(\frac{-\pi}{4}) + i\sin(\frac{-\pi}{4}))$$

   - *Le nombre complexe :* $b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
     On a : $|b| = \sqrt{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2} = \sqrt{1} = 1$. *Donc*

$$b = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$$

3. *On considère la rotation* R *de centre le point* O *et d'angle* $\frac{5\pi}{6}$.

   a) *Le point* M' *d'affixe* z' *est l'image du point* M *d'affixe* z *par la rotation* R*, c'est-à-dire :* $R(M) = M'$. *Donc :*

$$R(M) = M' \iff z' - o = e^{\frac{5\pi}{6}i}(z - o) \iff z' = e^{\frac{5\pi}{6}i}z$$

   et comme : $e^{\frac{5\pi}{6}i} = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6} = b$. *(La question* $2 - a$*). On obtient :* $z' = bz$.

- *Vérifions que :* $R(A) = C$.
  On a d'après l'expression complexe de la rotation R :

$$(2-2i)\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = 1-\sqrt{3}+(1+\sqrt{3})i = c.$$

  Donc C *est l'image du point* A *par la rotation* R.

4. *Montrons que* : $\arg(c) \equiv \arg(a) + \arg(b)\,[2\pi]$.

   D'après la question précédente, on a C *est l'image du point* A *par la rotation* R. *C'est-à-dire :* $c = ab$. *Donc*

$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \arg(ab)\,[2\pi] \\ &\equiv \arg(a)+\arg(b)\,[2\pi]\end{aligned}$$

   on calcule l'argument du nombre complexe c:

$$\begin{aligned}\arg(c) &\equiv \frac{-\pi}{4}+\frac{5\pi}{6}\,[2\pi] \\ &\equiv \frac{7}{12}\pi\,[2\pi]\end{aligned}$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

etude – generale.com