Correction de la série

Exercice 1 .

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin(3x)}$.

1. *On cherche* D_f :

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ \sin x \neq 0 \ \textit{et} \ \sin 3x \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq k\pi \ \textit{et} \ 3x \neq k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x \neq k\pi \ \textit{et} \ x \neq \frac{k\pi}{3} \ , \ k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \mathbb{R} \backslash \left\{k\pi, \ \frac{k\pi}{3} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

2. **a)** *Montrons que* : $(\forall x \in D_f), \ f(x) = \dfrac{2\cos 2x}{\sin 3x}$

Soit $x \in D_f$.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin(3x)} \\ &= \frac{\sin 3x - \sin x}{\sin x . \sin 3x} \\ &= \frac{2\cos\left(\dfrac{3x+x}{2}\right) . \sin\left(\dfrac{3x-x}{2}\right)}{\sin x . \sin 3x} \\ &= \frac{2\cos 2x . \sin x}{\sin x . \sin 3x} \\ &= \frac{2\cos 2x}{\sin 3x} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in D_f), \quad f(x) = \frac{2\cos 2x}{\sin 3x}$$

b) ♣ *On déduit que* : $\dfrac{1}{\sin \frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos \frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos \frac{\pi}{8}}$

Remarquons que :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \frac{2\cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right)}{\sin\left(3\times\frac{\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{2\times\frac{\sqrt{2}}{2}}{\sin\left(\frac{4\pi-\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}. \quad (1) \end{aligned}$$

d'autre part, on a $f(x) = \dfrac{1}{\sin x} - \dfrac{1}{\sin(3x)}$ *pour tout* $x \in D_f$ *donc*

$$f\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} \qquad (2)$$

donc d'après (1) *et* (2) *on déduit que*

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

♣ *On déduit que* : $\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$:

On a

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \frac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$$

en multipliant par $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$ *les deux membres de l'égalité on obtient*

$$\begin{aligned} 1-\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) &= \sqrt{2}\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) \\ &\iff -\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\left(\sqrt{2}+1\right) = -1 \\ &\iff \tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1 \end{aligned}$$

donc

$$\tan\left(\frac{\pi}{8}\right) = \sqrt{2}-1$$

3. *On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (E) :* $\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 2x+\sin 2x=1$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\left(\sqrt{2}-1\right)\cos 2x+\sin 2x &= 1\\
&\Longleftrightarrow \tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\cos 2x+\sin 2x=1 \ \ / \ \ \sqrt{2}-1=\tan\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&\Longleftrightarrow \frac{\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)}.\cos 2x+\sin 2x=1\\
&\Longleftrightarrow \sin\left(\frac{\pi}{8}\right).\cos 2x+\cos\left(\frac{\pi}{8}\right).\sin 2x=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&\Longleftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\\
&\Longleftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\cos\left(\frac{5\pi}{8}-\frac{4\pi}{8}\right)\\
&\Longleftrightarrow \sin\left(2x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right)\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x+\frac{\pi}{8}=\frac{5\pi}{8}+2k\pi\\ ou\\ 2x+\frac{\pi}{8}=\pi-\frac{5\pi}{8}+2k\pi\end{array}\right. \ \ / \ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} 2x=\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+2k\pi\\ ou\\ 2x=\pi-\frac{5\pi}{8}-\frac{\pi}{8}+2k\pi\end{array}\right. \ \ / \ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi\\ \quad ou\\ 2x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\end{array}\right. \ \ / \ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{4}+k\pi\\ \quad ou\\ x=\frac{\pi}{8}+k\pi\end{array}\right. \ \ / \ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{8}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\ \right\}\cup\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi \ / \ k\in\mathbb{Z}\ \right\}$$

4. On prouve que : $\dfrac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}+\dfrac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{7}}=\dfrac{1}{\sin\dfrac{\pi}{7}}$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{7}} &= \frac{\sin\dfrac{3\pi}{7}+\sin\dfrac{2\pi}{7}}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{2\sin\left(\dfrac{\dfrac{3\pi}{7}+\dfrac{2\pi}{7}}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\dfrac{3\pi}{7}-\dfrac{2\pi}{7}}{2}\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{2\sin\left(\dfrac{5\pi}{14}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{14}\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{2\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi}{7}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{3\pi}{7}\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)}{\sin\dfrac{2\pi}{7}.\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{2\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right)\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)}{2\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\sin\dfrac{3\pi}{7}}\\
&= \frac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right).\sin\left(\dfrac{3\pi}{7}\right)}\\
&= \frac{1}{\sin\left(\dfrac{\pi}{7}\right)}
\end{aligned}$$

Donc

$$\frac{1}{\sin\dfrac{2\pi}{7}}+\frac{1}{\sin\dfrac{3\pi}{7}}=\frac{1}{\sin\dfrac{\pi}{7}}$$

Exercice 2 .

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $A(x)=\cos 4x-\sin x$. *Soit* θ *un réel de* $\left]0,\dfrac{\pi}{2}\right[$ *tel que :* $\sin\theta=\dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

1. ♣ *Montrons que :* $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$.

On a

$$\begin{aligned}
\cos^2\theta+\sin^2\theta &= 1\\
&\Longleftrightarrow \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta\\
&\Longleftrightarrow \cos^2\theta = 1-\left(\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)^2\\
&\Longleftrightarrow \cos^2\theta = \left(1-\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\left(1+\frac{\sqrt{5}-1}{4}\right)\\
&\Longleftrightarrow \cos^2\theta = \frac{\left(5-\sqrt{5}\right)\left(3+\sqrt{5}\right)}{16}\\
&\Longleftrightarrow \cos^2\theta = \frac{10+2\sqrt{5}}{16}\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \quad / \quad \cos\theta>0 \quad \textit{avec } \theta\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[
\end{aligned}$$

2. ♣ *Montrons que* : $\cos 2\theta = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.

$$\begin{aligned}
\cos 2\theta &= 2\cos^2\theta-1\\
&= 2\times\left(\frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}\right)^2-1\\
&= \frac{10+2\sqrt{5}}{8}-1\\
&= \frac{2+2\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{\sqrt{5}+1}{4}
\end{aligned}$$

♣ *Calculons* $\cos(4\theta)$.

$$\begin{aligned}
\cos(4\theta) &= \cos(2\times 2\theta)\\
&= 2\cos^2(2\theta)-1\\
&= 2\left(\frac{\sqrt{5}+1}{4}\right)^2-1\\
&= \frac{\left(\sqrt{5}+1\right)^2}{8}-1\\
&= \frac{\left(5+2\sqrt{5}+1\right)-8}{8}\\
&= \frac{-2+2\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{\sqrt{5}-1}{4}
\end{aligned}$$

♣ *On déduit que :* $A(\theta) = 0$.

On a

$$A(\theta) = \cos(4\theta) - \sin\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - \frac{\sqrt{5}-1}{4} = 0$$

3. *On résout dans* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'équation :* $A(x) = 0$.

Soit $x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

$$\begin{array}{rcl} A(x) & = & 0 \\ & \iff & \cos 4x - \sin x = 0 \\ & \iff & \cos 4x = \sin x \\ & \iff & \cos 4x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} 4x = \frac{\pi}{2} - x + 2k\pi \\ ou \\ 4x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 4x = -\frac{\pi}{2} + x + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} 5x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & \left\{ \begin{array}{c} x = \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} \\ ou \\ x = -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \end{array} \right. \quad / \; k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

on cherche parmi ces solutions ceux qui appartiennent à $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

♠ *On a*

$$0 < \frac{\pi}{10} + \frac{2k\pi}{5} < \frac{\pi}{2} \iff -\frac{1}{10} < \frac{2k}{5} < \frac{1}{2} - \frac{1}{10} \iff \frac{-1}{10} < \frac{2k}{5} < \frac{2}{5} \iff \frac{-1}{4} < k < 1$$

comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$ *donc* $x = \frac{\pi}{10} + \frac{2 \times 0 \times \pi}{5} = \frac{\pi}{10}$.

♠ *On a*

$$0 < -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} < \frac{\pi}{2} \iff \frac{1}{4} < k < 1$$

donc : $\forall k \in \mathbb{Z}, \; -\frac{\pi}{6} + \frac{2k\pi}{3} \notin \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{10}\right\}$$

♣ *On a* $\frac{\pi}{10}$ *est l'unique solution de l'équation* $A(x)=0$ *sur* $\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$ *et d'après la question* 2/ *on déduit que*

$$\theta=\frac{\pi}{10}$$

4. *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $(E):\ \sqrt{10+2\sqrt{5}}.\cos x+\left(\sqrt{5}-1\right)\sin x=2.$

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\sqrt{10+2\sqrt{5}}.\cos x+\left(\sqrt{5}-1\right)\sin x &= 2\\
&\Longleftrightarrow \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.\cos x+\frac{\sqrt{5}-1}{4}.\sin x=\frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos\theta.\cos x+\sin\theta.\sin x=\frac{1}{2}\\
&\Longleftrightarrow \cos(x-\theta)=\cos\frac{\pi}{3}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x-\theta=\frac{\pi}{3}+2k\pi\\ \quad\quad ou \\ x-\theta=-\frac{\pi}{3}+2k\end{array}\right. \quad /\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\theta+2k\pi\\ \quad\quad ou \\ x=-\frac{\pi}{3}+\theta+2k\end{array}\right. \quad /\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}+2k\pi\\ \quad\quad ou \\ x=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{10}+2k\end{array}\right. \quad /\ k\in\mathbb{Z}\\
&\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{13\pi}{30}+2k\pi\\ \quad\quad ou \\ x=-\frac{7\pi}{30}+2k\pi\end{array}\right. \quad /\ k\in\mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S=\left\{\frac{13\pi}{30}+2k\pi\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\left\{-\frac{7\pi}{30}+2k\pi/\ k\in\mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 3 .

1. *Montrons que :* $\cos 4x - \cos 2x = (2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 1)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} \cos 4x - \cos 2x & = & \cos(2 \times 2x) - \cos(2x) \\ & = & 2\cos^2(2x) - 1 - \cos(2x) \\ & = & 2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1 \end{array}$$

d'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl} (2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 1) & = & 2\cos^2(2x) - 2\cos(2x) + \cos(2x) - 1 \\ & = & 2\cos^2(2x) - \cos(2x) - 1 \end{array}$$

donc

$$\cos 4x - \cos 2x = (2\cos 2x + 1)(\cos 2x - 1).$$

2. *Etudions le signe de* $\cos 4x - \cos 2x$ *sur* $[0, \pi]$.

♣ *Déterminons le signe de* $\cos(2x) - 1$
On a

$$(\forall x \in \mathbb{R}), -1 \leq \cos 2x \leq 1$$

donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), -\cos 2x - 1 \leq 0$$

Et on a

$$\begin{array}{rcl} \cos 2x - 1 & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & \cos 2x = 1 \\ & \Longleftrightarrow & 2x = 2k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\ & \Longleftrightarrow & x = k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

comme $x \in [0, \pi]$ *alors*

$$\cos(2x) - 1 = 0 \iff x = 0 \quad ou \ x = \pi$$

♣ *Déterminons le signe de* $2\cos(2x) + 1$
On pose $X = 2x$.
Comme $x \in [0, \pi]$ *alors* $0 \leq 2x \leq 2\pi$ *donc* $X \in [0, 2\pi]$. *D'où*

$$\left\{ \begin{array}{c} 2\cos(X) + 1 > 0 \\ \\ X \in [0, 2\pi] \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \cos X > \dfrac{-1}{2} \\ \\ X \in [0, 2\pi] \end{array} \right.$$

on résout d'abord dans $[0, 2\pi]$ *l'équation* $\cos X = \dfrac{-1}{2}$. *On obtient*

$$\cos X = \frac{-1}{2} \iff X = \frac{2\pi}{3} \ ou \ X = \frac{4\pi}{3}$$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $X = -\dfrac{1}{2}$ *puis on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation* $\cos X > \dfrac{-1}{2}$ *est :* $\left[0, \dfrac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$.
C'est-à-dire

$$\cos X > \frac{-1}{2} \iff X \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right]$$

comme $x = \dfrac{X}{2}$, *alors* $x \in \left[0, \dfrac{\pi}{3}\right[\cup \left]\dfrac{2\pi}{3}, \pi\right]$. *D'où le tableau de signe de* $\cos(4x) - \cos(2x)$ *est le suivant :*

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos(2x)+1$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$\cos(2x)-1$	0	$-$		$-$		$-$	0
$\cos(4x)-\cos(2x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0

3. *On déduit les solutions de l'inéquation* $\cos(4x) > \cos(2x)$ *sur* $[-\pi, \pi]$.
   D'après la question 2/ *on a*

$$\begin{cases} \cos(4x) - \cos(2x) > 0 \\ x \in [0, \pi] \end{cases} \iff \frac{\pi}{3} < x < \frac{2\pi}{3}$$

Soit $x \in [-\pi, 0]$ *on a* $-x \in [0, \pi]$, *comme la fonction* $\cos$ *est paire alors*

$$\begin{aligned} & \begin{cases} \cos(-4x) - \cos(-2x) > 0 \\ -x \in [0, \pi] \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} \cos(4x) - \cos(2x) > 0 \\ x \in [-\pi, 0] \end{cases} \\ \iff & \frac{\pi}{3} < -x < \frac{2\pi}{3} \\ \iff & -\frac{2\pi}{3} < -x < \frac{-\pi}{3} \\ \iff & x \in \left]\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right[\end{aligned}$$

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $\cos(4x) > \cos(2x)$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *est*

$$S = \left]\frac{-2\pi}{3}, \frac{-\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$$

Exercice 4 .

Soit a un réel.

1. *Calculons* $\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ *en fonction de* $\cos a$ *et* $\sin a$:

$$\begin{aligned}\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right) &= \sqrt{2}\left(\cos a.\cos\frac{\pi}{4}+\sin a.\sin\frac{\pi}{4}\right)\\ &= \sqrt{2}\left(\cos a.\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin a.\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \cos a+\sin a\end{aligned}$$

On déduit que : $\cos a.\sin a=\cos^2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}\cos^2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2} &= \left(\frac{\cos a+\sin a}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}\\ &= \frac{\cos^2 a+2\cos a.\sin a+\sin^2 a}{2}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1+2\cos a.\sin a}{2}-\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{2}+\cos a.\sin a-\frac{1}{2}\\ &= \cos a.\sin a\end{aligned}$$

2. *On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par* :

$$f(x)=\cos(4x)+\sin(4x)-\sqrt{2}\sin(8x)$$

a) *Montrons que* : $(\forall x\in\mathbb{R})$, $f(x)=\sqrt{2}\left[-2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.

Soit $x\in\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}&\sqrt{2}\left[-2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]\\ =\ & -2\sqrt{2}\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\\ =\ & -2\sqrt{2}\left(\cos(4x).\frac{\sqrt{2}}{2}+\sin(4x).\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\sqrt{2}\left(\cos(4x).\cos\frac{\pi}{4}+\sin(4x).\sin\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\\ =\ & -\frac{4\sqrt{2}}{4}\left(\cos(4x)+\sin(4x)\right)^2+\cos(4x)+\sin(4x)+\sqrt{2}\\ =\ & -\frac{4\sqrt{2}}{4}\left(\cos^2(4x)+2\cos(4x).\sin(4x)+\sin^2(4x)\right)^2+\cos(4x)+\sin(4x)+\sqrt{2}\\ =\ & -\sqrt{2}\left(1+2\cos(4x)\sin(4x)\right)+\cos(4x)+\sin(4x)+\sqrt{2}\\ =\ & -\sqrt{2}\left(1+\sin(8x)\right)+\cos(4x)+\sin(4x)+\sqrt{2}\\ =\ & -\sqrt{2}-\sqrt{2}\sin(8x)+\cos(4x)+\sin(4x)+\sqrt{2}\\ =\ & \cos(4x)+\sin(4x)-\sqrt{2}\sin(8x)\\ =\ & f(x)\end{aligned}$$

donc
$$(\forall x \in \mathbb{R}), f(x) = \sqrt{2}\left[-2\cos^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 1\right]$$

b) *Montrons que* : $(\forall x \in \mathbb{R}),\ f(x) = 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\left[1 + 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
& 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\left[1 + 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right] \\
= \ & 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 4\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \\
= \ & 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 4\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos\left(2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\right) \\
= \ & 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 4\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\left(2\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) - 1\right) \\
= \ & 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 8\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) - 4\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) \\
= \ & -2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 8\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\cos^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) \quad / \ 2\sin x.\cos x = \sin(2x) \\
= \ & -2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) + 2\sqrt{2}\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) \\
= \ & \sqrt{2}\left(2\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\right) \\
= \ & \sqrt{2}\left(2\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 - 2\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right) - 1\right) \\
= \ & \sqrt{2}\left(2\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right) - 1\right) \\
= \ & \sqrt{2}\left(-\left(1 - 2\sin^2\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + \cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right) \quad / \ 1 - 2\sin^2 x = \cos(2x) \\
= \ & \sqrt{2}\left(-\cos\left(8x - \frac{\pi}{2}\right) + \cos(4x).\frac{\sqrt{2}}{2} + \sin(4x).\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
= \ & \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{2} - 8x\right) + \frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 4x + \sin 4x)\right) \\
= \ & -\sqrt{2}\sin(8x) + \cos 4x + \sin 4x \\
= \ & f(x)
\end{aligned}$$

donc
$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad f(x) = 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x - \frac{\pi}{8}\right)\left[1 + 2\cos\left(4x - \frac{\pi}{4}\right)\right]$$

3. Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $f(x) = 0$:

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & 0 \\ & \iff & 2\sqrt{2}\sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)\left[1+2\cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]=0 \\ & \iff & \sin^2\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)=0 \quad ou \quad \cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2} \\ & \iff & \sin\left(2x-\dfrac{\pi}{8}\right)=0 \quad ou \ \cos\left(4x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) \\ & \iff & 2x-\dfrac{\pi}{8}=k\pi \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} 4x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ 4x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & 2x=\dfrac{\pi}{8}+k\pi \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} 4x-\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \\ ou \\ 4x-\dfrac{\pi}{4}=-\dfrac{2\pi}{3}+2k\pi \end{array}\right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2} \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} 4x=\dfrac{11\pi}{12}+2k\pi \\ ou \\ 4x=-\dfrac{5\pi}{12}+2k\pi \end{array}\right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & x=\dfrac{\pi}{16}+\dfrac{k\pi}{2} \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} x=\dfrac{11\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2} \\ ou \\ x=-\dfrac{5\pi}{48}+\dfrac{k\pi}{2} \end{array}\right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S=\left\{\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{11\pi}{48}+\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{-\frac{5\pi}{48}+\frac{k\pi}{2} \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 5 .

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin(2x)-\sqrt{2}\cos x}$$

1. **a)** *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $\sin(2x)-\sqrt{2}\cos x=0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{lcl} \sin(2x) - \sqrt{2}\cos x & = & 0 \\ & \iff & 2\sin x.\cos x - \sqrt{2}\cos x = 0 \\ & \iff & \cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right) = 0 \\ & \iff & \cos x = 0 \quad ou \quad \sin x = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sin\dfrac{\pi}{4} \\ & \iff & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \quad ou \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\ & \iff & x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \quad ou \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation est :

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

b) *On cherche* D_f :

On a

$$\begin{array}{rcl} D_f & = & \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \sin(2x) - \sqrt{2}\cos x \neq 0 \ \right\} \\ & = & \mathbb{R} \setminus S \\ & = & \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \ \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi, \ \dfrac{3\pi}{4} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{array}$$

2. Montrons que : $(\forall x \in D_f), \ f(x) = \dfrac{\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}}$.

Soit $x \in D_f$.

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \dfrac{\sin x - \cos x}{\sin(2x) - \sqrt{2}\cos x} \\ & = & \dfrac{\sin x - \cos x}{2\sin x.\cos x - \sqrt{2}\cos x} \\ & = & \dfrac{\cos x\left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - 1\right)}{\cos x\left(2\sin x - \sqrt{2}\right)} \\ & = & \dfrac{\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}} \end{array}$$

donc

$$(\forall x \in D_f), \quad f(x) = \frac{\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}}$$

3. **a)** *Résolvons dans* $[0,2\pi]$ *l'équation* $f(x)=0$.

Soit $x \in [0,2\pi] \cap D_f = [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

$$f(x)=0 \iff \frac{\tan x - 1}{2\sin x - \sqrt{2}} = 0 \iff \tan x - 1 = 0 \iff \tan x = 1 \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *ce qui signifie que* $x \in [0,2\pi]$ *et* $x \notin \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *alors*

$$0 \leq \frac{\pi}{4} + k\pi \leq 2\pi \iff -\frac{1}{4} \leq k \leq \frac{7}{4}$$

puisque $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k \in \{0,1\}$, *donc* $x = \frac{\pi}{4}$ *ou* $x = \frac{5\pi}{4}$. *Comme* $x \notin \left\{\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right\}$. *Donc l'ensemble des solutions de l'équation est :*

$$S = \left\{\frac{5\pi}{4}\right\}$$

b) *Résolvons dans* $[0,2\pi]$ *le système suivant :* $\begin{cases} \tan x > 1 \\ \sin x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$.

Le système existe si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}$. *C'est-à-dire le système est défini sur* $D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

♣ *Soit* $x \in [0,2\pi] \cap D = [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$.

On a

$$\tan x = 1 \iff \tan x = \tan\frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [0,2\pi] \setminus \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$ *alors* $x = \frac{\pi}{4}$ *ou* $x = \frac{5\pi}{4}$. *On construit le cercle trigonométrique puis on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation* $\tan x > 1$ *est :*

$$\left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right[= S_1$$

♣ *D'autre part, on a*

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \iff \sin x = \sin\frac{\pi}{4} \iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \ ou\ x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}.$$

et comme $x \in [0, 2\pi]$ *alors* $x = \frac{\pi}{4}$ *ou* $x = \frac{3\pi}{4}$. *On construit le cercle trigonométrique puis on déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation* $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ *est :*

$$\left]\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}\right[= S_2$$

donc l'ensemble des solutions du système est :

$$S = S_1 \cap S_2 = \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$$

Exercice 6 .

Résolvons dans $\left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *l'inéquation :* $\dfrac{\cos(3x) + 2\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} \geq 0$

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ \sin x - \sqrt{3}\cos x \neq 0\right\}$$

Résolvons l'équation : $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$

$$\begin{array}{rcl}
\sin x - \sqrt{3}\cos x & = & 0 \\
& \Longleftrightarrow & 2\left(\sin x . \sin\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{6} . \cos x\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & -2\left(\cos x . \cos\frac{\pi}{6} - \sin x . \sin\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & -2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \\
& \Longleftrightarrow & x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}
\end{array}$$

donc

$$D = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{3} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

D'où l'inéquation est définie sur D.

Soit $x \in \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \cap D = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \setminus \left\{\frac{\pi}{3}\right\}$.

$$\begin{aligned}
\frac{\cos(3x) + 2\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x} &\geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{\cos 3x + \cos x + \cos x}{-2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{2\cos 2x . \cos x + \cos x}{-2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{\cos x\,(2\cos 2x + 1)}{-2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \geq 0 \\
&\Longleftrightarrow \frac{-\cos x\,(2\cos(2x) + 1)}{2\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)} \geq 0
\end{aligned}$$

Etudions le signe de $2\cos(2x) + 1$ *et* $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$ *sur* $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On pose $X = x + \frac{\pi}{6}$ *et* $t = 2x$

Comme $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ *alors* $-\pi \leq 2x \leq \pi$ *et* $-\frac{\pi}{3} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{2\pi}{3}$ *c'est-à-dire* $t \in [-\pi, \pi]$ *et* $X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$.

Donc

$$\begin{aligned}
2\cos t + 1 &= 0 \\
&\Longleftrightarrow \cos t = \frac{-1}{2} \\
&\Longleftrightarrow \cos t = \cos\frac{2\pi}{3} \\
&\Longleftrightarrow t = \frac{2\pi}{3} \quad \textit{ou } t = -\frac{2\pi}{3} \\
&\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{3} \quad \textit{ou } x = -\frac{\pi}{3}
\end{aligned}$$

et

$$\cos X = 0 \Longleftrightarrow X = \frac{\pi}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$$

On construit le cercle trigonométrique puis on déduit les tableaux de signes suivants :

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
t	$-\pi$		$\frac{-2\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2\cos(2x)+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	

et

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
X	$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{2\pi}{3}$
$\cos(x+\frac{\pi}{6})$		$+$	0	$-$	

donc on déduit le tableau de signe de l'expression $\dfrac{\cos(3x) + 2\cos x}{\sin x - \sqrt{3}\cos x}$:

x	$\frac{-\pi}{2}$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$
$-cosx$	0	$-$	|	$-$	|	$-$	0
$2\cos(2x)+1$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$\cos(x+\frac{\pi}{6})$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$\frac{-cosx(2\cos(2x)+1)}{2\cos(x+\frac{\pi}{6})}$	0	$+$	0	$-$	||	$-$	0

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{3}\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com