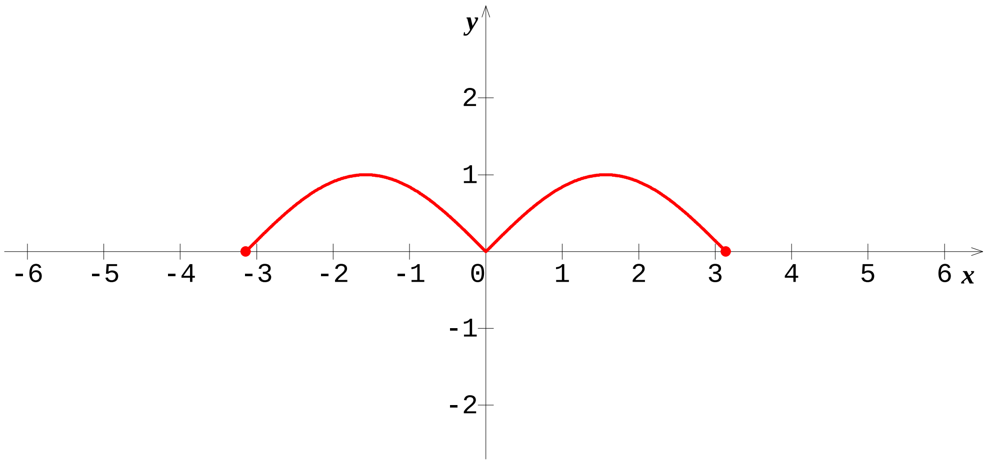
Correction de la série d'exercices sur le calcul trigonométrique 2

Exercice 1 .

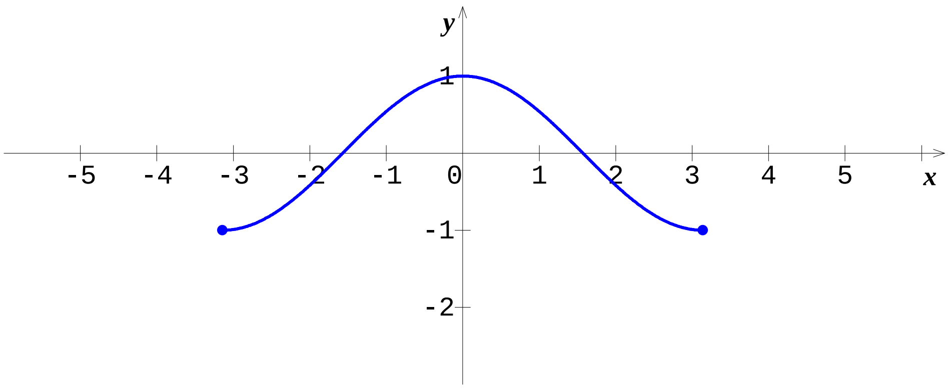
♣ *On construit dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *la courbe de la fonction* $f(x) = |\sin x|$ *dans un intrevalle* $[-\pi, \pi]$.

$(\forall x \in [0, \pi])$, $f(x) = \sin x$. *Donc les courbes* (C_f) *et* $(C_{\sin})$ *sont confondues sur* $[0, \pi]$. *La courbe* (C_f) *est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car la fonction* f *est paire.*



♣ *On construit dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *la courbe de la fonction* $f(x) = \cos(|x|)$ *dans un intrevalle* $[-\pi, \pi]$.

$(\forall x \in [0, \pi])$, $f(x) = \cos x$. *Donc les courbes* (C_f) *et* $(C_{\sin})$ *sont confondues sur* $[0, \pi]$. *La courbe* (C_f) *est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées car la fonction* f *est paire.*



Exercice 2 .

On résout dans I les équations trigonométriques suivantes :

- *On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_1) :*

  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$(E_1) \iff \sin x = \sin\left(\frac{-\pi}{7}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{7} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \pi + \dfrac{\pi}{7} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{-\pi}{7} + 2k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{8\pi}{7} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) est :

$$S = \left\{\frac{-\pi}{7} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{8\pi}{7} + 2k\pi/\ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- *On résout dans $[0, 2\pi]$ l'équation (E_2) :*

  Soit $x \in [0, 2\pi]$. On a

$$(E_2) \iff \cos 2x = \cos\frac{7\pi}{8}$$

$$\iff \begin{cases} 2x = \dfrac{7\pi}{8} + 2k\pi \\ \quad ou \\ 2x = \dfrac{-7\pi}{8} + 2k\pi \end{cases} /\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\iff \begin{cases} x = \dfrac{7\pi}{16} + k\pi \\ \quad ou \\ x = \dfrac{-7\pi}{16} + k\pi \end{cases} /\ k \in \mathbb{Z}$$

  Comme $x \in [0, 2\pi]$, alors

  - $$0 \leq \frac{7\pi}{16} + k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq \frac{7}{16} + k \leq 2 \iff -\frac{7}{16} \leq k \leq \frac{25}{16}$$

    comme $k \in \mathbb{Z}$, alors : $k = 0$ ou $k = 1$. Donc :
    Si $k = 0$, alors : $x = \dfrac{7\pi}{16}$.
    Si $k = 1$, alors : $x = \dfrac{7\pi}{16} + \pi = \dfrac{23\pi}{16}$.

- $$0 \leq -\frac{7\pi}{16} + k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq -\frac{7}{16} + k \leq 2 \iff \frac{7}{16} \leq k \leq \frac{39}{16}$$

  comme $k \in \mathbb{Z}$, alors : $k = 1$ ou $k = 2$. Donc :
  Si $k = 1$, alors : $x = \dfrac{9\pi}{16}$
  Si $k = 2$, alors : $x = -\dfrac{7\pi}{16} + 2\pi = \dfrac{25\pi}{16}$.
  Donc, l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) est :

  $$S = \left\{ \frac{7\pi}{16}, \frac{9\pi}{16}, \frac{23\pi}{16}, \frac{25\pi}{16} \right\}$$

- *On résout dans $\left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ l'équation (E_3) :*

  Soit $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$. On a

  $$\begin{aligned} (E_3) &\iff \cos x = -\cos\frac{\pi}{3} \\ &\iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{-2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  Comme $x \in \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$ alors

  - $$\frac{-\pi}{2} < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \prec \frac{\pi}{2} \iff \frac{-1}{2} < \frac{2}{3} + 2k \prec \frac{1}{2} \iff \frac{-7}{12} < k < \frac{-1}{12}$$

    donc : $(\forall k \in \mathbb{Z})$, $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \notin \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

  - $$\frac{-\pi}{2} < -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \frac{\pi}{2} \iff \frac{-1}{2} < -\frac{2}{3} + 2k < \frac{1}{2} \iff \frac{1}{12} < k < \frac{7}{12}$$

    donc : $(\forall k \in \mathbb{Z})$, $\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \notin \left]\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
    D'où

    $$S = \varnothing$$

- *On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation (E_4) :*

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$
\begin{aligned}
(E_4) \quad &\Longleftrightarrow \quad \cos 3x = \cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 3x = \dfrac{\pi}{2} + x + 2k\pi \\ ou \\ 3x = -\dfrac{\pi}{2} - x + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 3x - x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 3x + x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} 2x = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \\ ou \\ 4x = \dfrac{-\pi}{2} + 2k\pi \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\
&\Longleftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{-\pi}{8} + \dfrac{k\pi}{2} \end{array} \right. \quad / \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Donc, l'ensemble les solutions de l'équation (E_4) est :

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{8} + \frac{k\pi}{2} / \ k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \frac{\pi}{4} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Exercice 3 .

Soit f une fonction numérique paire et périodique de période 2 telle que :

$$(\forall x \in [0,1]), \quad f(x) = x$$

1. *Calculons $f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et $f\left(\dfrac{-7}{2}\right)$.*

   On a $\dfrac{1}{2} \in [0,1]$, donc $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2}$.

   On a f est périodique de période 2, c-à-d : $(\forall x \in D_f)(\forall k \in \mathbb{Z})$, $f(x+2k) = f(x)$. Donc

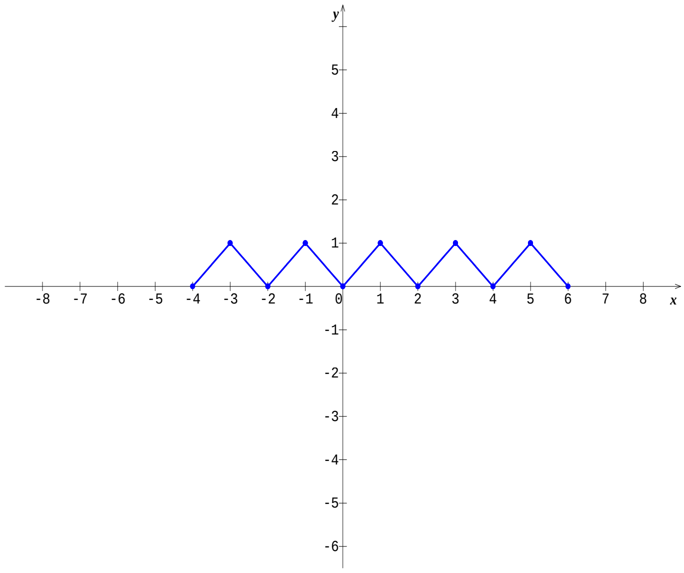
   $$f\left(\frac{-7}{2}\right) = f\left(\frac{1-8}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2} - 4\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

2. *On construit la courbe de la fonction f sur l'intervalle $[-6, 6]$.*

   ♣ *On construit la courbe sur $\dfrac{1}{2}$−période donc sur $[0,1]$.*

   ♣ *On continue la construction en prenant la symétrique de cette portion de la courbe par rapport à l'axe des ordonnées, car la fonction paire. On obtient la courbe sur une période $T = 2$ sur $[-1,1]$.*

♣ *On duplique indéfiniment cette portion à gauche et à droite. On obtient la courbe suivante*



Exercice 4 .

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{\cos(x).\sin(x)}{2\cos(x)+1}$.

1. *On cherche* D_f :

   On a

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ \ 2\cos(x) + 1 \neq 0\}$$

   On résout dans $\mathbb{R}$ *l'équation :* $2\cos(x) + 1 = 0$

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$2\cos(x)+1 = 0 \iff \cos x = \cos\frac{2\pi}{3} \iff x = \frac{2\pi}{3}+2k\pi \quad ou\ x = \frac{-2\pi}{3}+2k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z}$$

   donc

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x \in \mathbb{R}/ \ \ x \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \ et \ \ x \neq \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \ \ /k \in \mathbb{Z}\right\} \\ &= \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \end{aligned}$$

2. *Montrons que* 2π *est une période de* f

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ , \ \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$. *On a d'une part :*

$$\begin{aligned}
x \in D_f \quad & \Longleftrightarrow \quad x \neq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ et \ x \neq \frac{-2\pi}{3} + 2k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\
& \Longleftrightarrow \quad x + 2\pi \neq \frac{2\pi}{3} + 2\pi + 2k\pi \quad et \quad x + 2\pi \neq \frac{-2\pi}{3} + 2\pi + 2k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\
& \Longleftrightarrow \quad x + 2\pi \neq \frac{2\pi}{3} + 2\pi\left(k+1\right) \quad et \quad x + 2\pi \neq \frac{-2\pi}{3} + 2\pi\left(k+1\right) \quad / \ k \in \mathbb{Z} \\
& \Longleftrightarrow \quad x + 2\pi \neq \frac{2\pi}{3} + 2k'\pi \quad et \quad x + 2\pi \neq \frac{-2\pi}{3} + 2k'\pi \quad / \ k' \in \mathbb{Z} \\
& \Longleftrightarrow \quad (x + 2\pi) \in D_f
\end{aligned}$$

D'autre part, soit $x \in D_f$

$$f\left(x + 2\pi\right) = \frac{\cos\left(x + 2\pi\right) . \sin\left(x + 2\pi\right)}{2\cos\left(x + 2\pi\right) + 1} = \frac{\cos\left(x\right) . \sin\left(x\right)}{2\cos\left(x\right) + 1} = f\left(x\right)$$

donc la fonction f *est périodique de période* 2π.

3. *On déduit l'ensemble d'étude la fonction* f

   Comme f *est une fonction impaire (à démontrer) est périodique de période* 2π *par conséquent il suffit d'étudier la fonction* f *sur* $\left[0, \frac{T}{2}\right] \cap D_f$ *ou* $\left[\frac{-T}{2}, 0\right] \cap D_f$. *D'où*

$$D_E = [0, \pi] \cap D_f = [0, \pi] \ \setminus \ \left\{\frac{2\pi}{3}\right\} = \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

Exercice 5 .

♣ *L'équation* (E_1) *existe si et seulement si* $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$, *on a*

$$\begin{aligned}
(E_1) \quad & \Longleftrightarrow \quad \tan^2 x = \frac{1}{3} \\
& \Longleftrightarrow \quad \left(\tan x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(\tan x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0 \\
& \Longleftrightarrow \quad \tan x = \frac{1}{\sqrt{3}} \ \ ou \ \ \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \\
& \Longleftrightarrow \quad \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \ ou \ \tan x = \frac{-\sqrt{3}}{3} \\
& \Longleftrightarrow \quad \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \quad ou \quad \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\
& \Longleftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + k\pi \quad ou \quad x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{6} + k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- *On résout dans* $[0, 2\pi]$ *l'équation* (E_2) *:*

  Soit $x \in [0, 2\pi]$, *on pose :* $X = \cos x$. *On obient l'équation suivante :* $2X^2 - 3\sqrt{3}X + 3 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = \left(-3\sqrt{3}\right)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 3 > 0$$

  L'équation admet deux solutions réelles distinctes X_1 *et* X_2 *:*

$$\begin{aligned} X \quad &= \quad \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{4} \quad ou \quad X = \frac{3\sqrt{3}-\sqrt{3}}{4} \\ &\iff \quad X = \sqrt{3} \quad ou \quad X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \quad \underbrace{\cos x = \sqrt{3}}_{impossible} \quad ou \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \quad \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \quad x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad ou \quad x = \frac{-\pi}{6} + 2k\pi \quad / \ k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

  Comme $x \in [0, 2\pi]$, *alors*

  - $$0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 2 \iff -\frac{1}{6} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{6} \iff \frac{-1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$$

    comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \frac{\pi}{6}$.

  - $$0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2 \iff \frac{1}{6} \leq 2k \leq 2 + \frac{1}{6} \iff \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12}$$

    comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 1$. *Donc :* $x = \frac{-\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$.

  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$$

- *L'équation* (E_3) *existe si et seulement si* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

  Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$. *On pose* : $X = \tan x$, *on obtient l'équation suivante* : $\sqrt{3}X^2 + \left(\sqrt{3}-1\right)X - 1 = 0$.

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= \left(\sqrt{3}-1\right)^2 - 4 \times \sqrt{3} \times (-1) \\
&= 3 - 2\sqrt{3} + 1 + 4\sqrt{3} \\
&= 4 + 2\sqrt{3} \\
&= \left(\sqrt{3}+1\right)^2 \succ 0.
\end{aligned}$$

  L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)+\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}} \quad ou \quad X = \frac{-\left(\sqrt{3}-1\right)-\left(\sqrt{3}+1\right)}{2\sqrt{3}} \\
&\iff X = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ou \quad X = -1 \\
&\iff \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad ou \quad \tan x = -1 \\
&\iff \tan x = \tan\frac{\pi}{6} \quad ou \quad \tan x = \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\
&\iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi \;\; ou \;\; x = \frac{-\pi}{4} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

  Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) *est* :

$$S = \left\{\frac{\pi}{6} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{-\pi}{4} + k\pi \;/\; k \in \mathbb{Z}\right\}$$

- *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* (E_4) :

  Soit $x \in \mathbb{R}$. *On pose* : $\sin x = X$, *on obient l'équation suivante* : $2X^2 - 3X + 1 = 0$.

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$$

  L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned}
X &= \frac{3+1}{4} \quad ou \quad X = \frac{3-1}{2 \times 2} \\
&\iff X = 1 \quad ou \quad X = \frac{1}{2} \\
&\iff \sin x = 1 \quad ou \quad \sin x = \frac{1}{2} \\
&\iff x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad ou \quad \left\{\begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{array}\right. \quad /k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{2} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{\pi}{6} + 2k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z}\right\} \cup \left\{\frac{5\pi}{6} + 2k\pi / \ k \in \mathbb{Z}\right\}$$

Exercice 6 .

L'inéquation (I) *existe si et seulement si* $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Résolvons dans $[0, 2\pi]$ *les équations* (E_1) : $\sqrt{3}\tan x - 1 = 0$ *et* (E_2) : $2\sin x - 1 = 0$.

♣ *Soit* $x \in [0, 2\pi]$.

$$(E_2) \iff \sin x = \frac{1}{2} \iff \begin{cases} x = \dfrac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \quad\quad ou \\ x = \dfrac{5\pi}{6} + 2k\pi \end{cases} / \ k \in \mathbb{Z}$$

comme $x \in [0, 2\pi]$ *alors*

$$0 \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 2 \iff \frac{-1}{6} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{6} \iff \frac{-1}{12} \leq k \leq \frac{11}{12}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \dfrac{\pi}{6}$.

De même.

$$0 \leq \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq \frac{5}{6} + 2k \leq 2 \iff \frac{-5}{6} \leq 2k \leq 2 - \frac{5}{6} \iff \frac{-1}{12} \leq k \leq \frac{7}{12}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

d'où les solutions de l'équation (E_2) *dans* $[0, 2\pi]$ *sont :* $\dfrac{\pi}{6}$ *et* $\dfrac{5\pi}{6}$.

♣ *Soit* $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$.

$$\begin{aligned} (E_1) \quad &\iff \quad \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ &\iff \quad \tan x = \tan\left(\frac{-\pi}{6}\right) \\ &\iff \quad x = \frac{-\pi}{6} + k\pi \quad /k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

comme $x \in [0, 2\pi] \setminus \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ *c-à-d* $x \in [0, 2\pi]$ *et* $x \notin \left\{\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right\}$ *alors*

$$0 \leq \frac{-\pi}{6} + k\pi \leq 2\pi \iff 0 \leq \frac{-1}{6} + k \leq 2 \iff \frac{1}{6} \leq k \leq \frac{13}{6}$$

et comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors* $k \in \{0, 2\}$.

D'où les solutions de l'équation (E_1) *dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *sont :* $\dfrac{5\pi}{6}$ *et* $\dfrac{11\pi}{6}$.

On en déduit le tableau de signe de l'expression $P(x) = \left(\sqrt{3}\tan x + 1\right)(2\sin x - 1)$:

x	0		$\frac{\pi}{6}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{5\pi}{6}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{11\pi}{6}$		2π
$2sinx-1$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
$\sqrt{3}tanx+1$		$+$		$+$	$\|$	$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$+$	
$P(x)$		$-$	0	$+$	$\|$	$-$	0	$-$	$\|$	$+$	0	$-$	

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S = \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{11\pi}{6}\right[$$

Exercice 7 .

♣ *Résolvons dans* $[-\pi, \pi]$ *l'équation* (E) : $\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right).\sin x = 0$.

Soit $x \in [-\pi, \pi]$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \left(1 - \sqrt{2}\cos x\right) = 0 \quad ou \quad \sin x = 0 \\
&\iff \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad ou \quad \sin x = 0 \\
&\iff \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad ou \quad x = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff \cos x = \cos\frac{\pi}{4} \quad ou \quad x = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \\
&\iff x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad ou\ x = \frac{-\pi}{4} + 2k\pi \quad ou \quad x = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

comme $x \in [-\pi, \pi]$ *alors*

♠

$$-\pi \leq \frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \iff -1 \leq \frac{1}{4} + 2k \leq 1 \iff \frac{-5}{8} \leq k \leq \frac{3}{8}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$ *donc* $x = \dfrac{\pi}{4}$.

♠

$$-\pi \leq -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \leq \pi \iff -1 \leq -\frac{1}{4} + 2k \leq 1 \iff \frac{-3}{8} \leq k \leq \frac{5}{8}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$ *donc* $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

♠
$$-\pi \leq k\pi \leq \pi \iff -1 \leq k \leq 1$$

comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k \in \{-1, 0, 1\}$ *donc* $x = -\pi$ *ou* $x = 0$ *ou* $x = \pi$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $[-\pi, \pi]$ *est*

$$S = \left\{-\pi, \frac{-\pi}{4}, 0, \frac{\pi}{4}, \pi\right\}$$

♣ *Résolvons dans* $[-\pi, \pi]$ *l'inéquation* (I) : $\left(1 - \sqrt{2}\cos x\right).\sin x < 0$.

On a les solutions de l'équation $1 - \sqrt{2}\cos x = 0$ *dans* $[-\pi, \pi]$ *sont* : $\frac{-\pi}{4}$ *et* $\frac{\pi}{4}$. *Les solutions de l'équation* : $\sin x = 0$ *dans* $[-\pi, \pi]$ *sont* $-\pi$, 0 *et* π.
Comme le signe de $P(x) = \left(1 - \sqrt{2}\cos x\right).\sin x$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *dépend du signe des expressions* $1 - \sqrt{2}\cos x$ *et* $\sin x$. *Donc*

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{4}$		0		$\frac{\pi}{4}$		π
$1-\sqrt{2}cosx$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$sinx$	0	$-$		$-$	0	$+$		$+$	0
$P(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation dans $[-\pi, \pi]$ *est* :

$$S = \left]-\pi, \frac{-\pi}{4}\right[\cup \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$$

Exercice 8 .

1. *On résout dans* $]0, \pi[$ *l'inéquation* (I) : $2\cos^2 x - \cos x < 0$.
   Résolvons dans $]0, \pi[$ *l'équation* (E) : $2\cos^2 x - \cos x = 0$
   Soit $x \in]0, \pi[$.

$$\begin{aligned}
(E) &\iff \cos x\,(2\cos x - 1) = 0 \\
&\iff \cos x = 0 \ \textit{ou} \ \cos x = \frac{1}{2} \\
&\iff \cos x = 0 \ \textit{ou} \ \cos x = \cos\frac{\pi}{3} \\
&\iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \textit{ou} \ x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \textit{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \ /k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}$$

Comme $x \in]0, \pi[$ *alors*

-
$$0<\frac{\pi}{2}+k\pi<\pi \iff 0<\frac{1}{2}+k<1 \iff \frac{-1}{2}<k<1-\frac{1}{2} \iff \frac{-1}{2}<k<\frac{1}{2}$$

comme $k\in\mathbb{Z}$, *alors* : $k=0$, *donc* : $x=\dfrac{\pi}{2}$

-
$$0<\frac{\pi}{3}+2k\pi<\pi \iff 0<\frac{1}{3}+2k<1 \iff \frac{-1}{3}<2k<1-\frac{1}{3} \iff \frac{-1}{6}<k<\frac{1}{3}$$

comme $k\in\mathbb{Z}$, *alors* : $k=0$, *donc* : $x=\dfrac{\pi}{3}$.

-
$$0<-\frac{\pi}{3}+2k\pi<\pi \iff 0<-\frac{1}{3}+2k<1 \iff \frac{1}{3}<2k<1+\frac{1}{3} \iff \frac{1}{6}<k<\frac{2}{3}$$

donc $(\forall k\in\mathbb{Z})$, $\left(-\dfrac{\pi}{3}+2k\pi\right)\notin\,]0,\pi[$.

Donc les solutions de (E) *dans* $]0,\pi[$ *sont* : $\dfrac{\pi}{3}$ *et* $\dfrac{\pi}{2}$.

D'où on déduit le signe de $\cos x\,(2\cos x-1)$ *sur* $]0,\pi[$:

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		π
$cosx$		$+$	|	$+$	0	$-$	
$2cosx-1$		$+$	0	$-$	|	$-$	
$cosx(2cosx-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc :

$$S=\left]\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right[$$

2. *Soit* x *un réel. On pose* : $A(x)=\cos x.\sin x$

a) *Montrons que* : $A\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right)=A(x)$ *et* $A(\pi+x)=A(x)$.

Soit $x\in\mathbb{R}$, *on a*

$$A\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right).\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin x.\cos x=A(x)$$

et

$$A(\pi+x)=\cos(\pi+x).\sin(\pi+x)=\cos x.\sin x=A(x)$$

b) *Montrons que :* $A(x) = \dfrac{\tan x}{1+\tan^2 x}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$, *on a*

$$\frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{1+\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}} = \frac{\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{1}{\cos^2 x}} = \cos x . \sin x = A(x)$$

c) *On résout dans* $]-\pi, \pi]$ *l'équation :* $A(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

L'équation existe si et seulement si $x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Soit $x \in]-\pi, \pi] \setminus \left\{ \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\}$.

$$A(x) = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff \frac{\tan x}{1+\tan^2 x} = \frac{\sqrt{3}}{4} \iff -\sqrt{3}\tan^2 x + 4\tan x - \sqrt{3} = 0$$

On pose $\tan x = X$, *on obtient* $-\sqrt{3}X^2 + 4X - \sqrt{3} = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times \left(-\sqrt{3}\right) \times \left(-\sqrt{3}\right) = 4$$

L'équation admet deux solutions réelles distinctes :

$$\begin{aligned} X &= \frac{-4+\sqrt{4}}{-2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \textit{ou} \ X = \frac{-4-\sqrt{4}}{2 \times \left(-\sqrt{3}\right)} = \sqrt{3} \\ &\iff \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \ \textit{ou} \ \tan x = \sqrt{3} \\ &\iff x = \frac{\pi}{6} + k\pi \ \textit{ou} \ x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ /k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme $x \in]-\pi, \pi] \setminus \left\{ \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\}$ *c-à-d* $x \in]-\pi, \pi]$ *et* $x \notin \left\{ \dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2} \right\}$ *alors*

♣

$$-\pi < \frac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff -1 < \frac{1}{6} + k \leq 1 \iff -1 - \frac{1}{6} < k \leq 1 - \frac{1}{6} \iff \frac{-7}{6} < k \leq \frac{5}{6}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$, *alors :* $k \in \{-1, 0\}$ *donc* $x = \dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{-5\pi}{6}$.

♣

$$-\pi < \frac{\pi}{3} + k\pi \leq \pi \iff -1 < \frac{1}{3} + k \leq 1 \iff -1 - \frac{1}{3} < k \leq 1 - \frac{1}{3} \iff \frac{-4}{3} < k \leq \frac{2}{3}$$

comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k \in \{-1, 0\}$ *donc* $x = \dfrac{-2\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{3}$.

Donc l'ensemble des solutions de l'équation est

$$S = \left\{ \frac{-5\pi}{6}, \frac{-2\pi}{3}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

Exercice 9 .

1. *On résout dans l'intervalle* $[0, \pi]$ *l'inéquation* $(I) : \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$

   Soit $x \in [0, \pi]$. *On pose :* $X = 2x - \frac{\pi}{3}$, *donc*

$$0 \leq 2x \leq 2\pi \iff -\frac{\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \iff -\frac{\pi}{3} \leq X \leq \frac{5\pi}{3} \iff X \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$$

On résout dans l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ *l'inéquation* $(I') : \sin X \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

On commence par résoudre l'équation $(E) : \sin X = \frac{\sqrt{3}}{2}$ *dans* $\left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$.

$$(E) \iff \sin X = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \left\{ \begin{array}{c} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z} \iff \left\{ \begin{array}{c} X = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ X = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. /k \in \mathbb{Z}$$

Comme $X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right]$ *alors*

- $$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \iff \frac{-1}{3} \leq \frac{1}{3} + 2k \leq \frac{5}{3} \iff -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3}$$

  et comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k = 0$. *Donc :* $X = \frac{\pi}{3}$.

- $$-\frac{\pi}{3} \leq \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \leq \frac{5\pi}{3} \iff \frac{-1}{3} \leq \frac{2}{3} + 2k \leq \frac{5}{3} \iff -1 \leq 2k \leq 1 \iff -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2}$$

  et comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k = 0$. *Donc :* $X = \frac{2\pi}{3}$.

donc

$$\left\{ \begin{array}{l} \sin X = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ X \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] \end{array} \right. \iff X = \frac{\pi}{3} \quad ou \quad X = \frac{2\pi}{3}$$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $y = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, *donc*

$$\begin{cases} \sin X \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \\ X \in \left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right] \end{cases} \iff X \in \left[\dfrac{-\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right] \cup \left[\dfrac{2\pi}{3}, \dfrac{5\pi}{3}\right]$$

Puisque $X = 2x - \dfrac{\pi}{3}$, *d'où*

$$\begin{aligned} \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \;\epsilon\; \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right] &\iff \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right] \quad ou \quad \left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \in \left[\frac{2\pi}{3}, \right. \\ &\iff \frac{-\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{\pi}{3} \quad ou \quad \frac{2\pi}{3} \leq 2x - \frac{\pi}{3} \leq \frac{5\pi}{3} \\ &\iff 0 \leq 2x \leq \frac{2\pi}{3} \quad ou \quad \pi \leq 2x \leq 2\pi \\ &\iff 0 \leq x \leq \frac{\pi}{3} \quad ou \quad \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi \\ &\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \quad ou \; x \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \\ &\iff x \in \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right] \end{aligned}$$

Ceci signifie que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = \left[0, \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

2. *On résout dans l'intervalle* $[0, 2\pi]$ *l'inéquation* $(I) : \cos\left(\dfrac{x}{2}\right) \leq -\frac{1}{2}$

   Soit $x \in [0, 2\pi]$. *On pose :* $X = \dfrac{x}{2}$, *donc*

$$0 \leq \frac{x}{2} \leq \frac{2\pi}{2} \iff 0 \leq \frac{x}{2} \leq \pi \iff 0 \leq X \leq \pi \iff X \in [0, \pi]$$

On résout dans l'intervalle $[0, \pi]$ *l'inéquation* $(I') : \cos X \leq -\dfrac{1}{2}$.

On commence par résoudre l'équation $(E) : \cos X = -\dfrac{1}{2}$ *dans* $[0, \pi]$.

$$\cos X = -\frac{1}{2} \iff \cos X = \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) \iff \begin{cases} X = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \\ \quad ou \\ X = -\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} /k \in \mathbb{Z}$$

comme $X \in [0, \pi]$, *alors*

- $$0 \leq \frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq \pi \iff 0 \leq \frac{2}{3}+2k \leq 1 \iff \frac{-2}{3} \leq 2k \leq 1-\frac{2}{3} \iff -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{1}{6}$$

  et comme $k \in \mathbb{Z}$ *alors :* $k = 0$. *Donc :* $X = \dfrac{2\pi}{3}$.

- $$0 \leq -\frac{2\pi}{3}+2k\pi \leq \pi \iff 0 \leq \frac{-2}{3}+2k \leq 1 \iff \frac{2}{3} \leq 2k \leq 1+\frac{2}{3} \iff \frac{1}{4} \leq k \leq \frac{5}{6}$$

  donc $(\forall k \in \mathbb{Z})\,,\ \left(-\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right) \notin [0,\pi]\,.$

donc

$$\begin{cases} \cos X = \dfrac{1}{2} \\ X \in [0,\pi] \end{cases} \iff X = \frac{2\pi}{3}$$

On construit le cercle trigonométrique et la droite d'équation $X = \dfrac{1}{2}$, *donc*

$$\begin{cases} \cos X \leq \dfrac{1}{2} \\ X \in [0,\pi] \end{cases} \iff X \in \left]\frac{2\pi}{3},\pi\right]$$

Puisque $X = \dfrac{x}{2}$, *d'où*

$$\frac{x}{2} \in \left]\frac{2\pi}{3},\pi\right] \iff \frac{2\pi}{3} \prec \frac{x}{2} \leq \pi \iff \frac{4\pi}{3} \prec x \leq 2\pi \iff x \in \left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$$

Ceci signifie que l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est :*

$$S = \left]\frac{4\pi}{3},2\pi\right]$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**