# Correction de la série

**Exercice 1** .

*Soient* $a$ *et* $b$ *deux réels positifs tels que* : $1 < a < b$.
*Comparons les nombres* $A = a^2 + 1$ *et* $B = ab + 2$.
*Étudions le signe de* $A - B$ :

$$\begin{aligned} A - B &= a^2 + 1 - (ab + 2) \\ &= a^2 + 1 - ab - 2 \\ &= a^2 - ab - 1 \\ &= a(a - b) - 1 \end{aligned}$$

*On a* $1 < a < b$ *alors* $a < b$ *c'est-à-dire* $a - b < 0$ *par suite* $a(a-b) < 0$ *(car* $a > 0$*) c'est-à-dire* $a(a-b) - 1 < -1$ *et comme* $-1 < 0$ *donc* $a(a-b) - 1 < 0$*, d'où* $A - B < 0$ *ce qui signifie que*

$$A < B$$

**Exercice 2** .

*Montrons que* : $\dfrac{7a+2b}{7a} \geq \dfrac{8b}{7a+2b}$.
*Soient* $a$ *et* $b$ *deux réels strictement positifs.*

$$\begin{aligned} \frac{7a+2b}{7a} - \frac{8b}{7a+2b} &= \frac{(7a+2b)^2 - 56ab}{7a(7a+2b)} \\ &= \frac{49a^2 + 28ab + 4b^2 - 56ab}{7a(7a+2b)} \\ &= \frac{49a^2 - 28ab + 4b^2}{7a(7a+2b)} \\ &= \frac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \end{aligned}$$

*On a* $(7a-2b)^2 \geq 0$ *pour tous* $a, b$ *et* $7a(7a+2b) > 0$ *alors* $\dfrac{(7a-2b)^2}{7a(7a+2b)} \geq 0$ *donc*

$$\frac{7a+2b}{7a} \geq \frac{8b}{7a+2b}$$

**Exercice 3** .

*Montrons que* : $(a+b)\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right) \geq 4$.

*Soient $a$ et $b$ deux réels.*

$$\begin{aligned}(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)-4 &= 1+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}+1-4\\ &= \frac{a}{b}+\frac{b}{a}-2\\ &= \frac{a^2+b^2}{ab}-2\\ &= \frac{a^2+b^2-2ab}{ab}\\ &= \frac{a^2-2ab+b^2}{ab}\\ &= \frac{(a-b)^2}{ab}\end{aligned}$$

*On a $(a-b)^2 \geq 0$ pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, et comme $a$ et $b$ ont le même signe alors $ab > 0$ donc $\dfrac{(a-b)^2}{ab} \geq 0$ ce qui signifie que*

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \geq 4.$$

**Exercice 4** .

1. *Montrons que : $a^2+b^2 \geq 2ab$.*

   *Soient $a$ et $b$ deux réels.*

   $$\begin{aligned}a^2+b^2-2ab &= a^2-2ab+b^2\\ &= (a-b)^2 \geq 0\end{aligned}$$

   *Donc*

   $$a^2+b^2 \geq 2ab.$$

2. **a)** *On déduit que : $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$.*

   *Soient $a$, $b$ et $c$ des réels.*

   *On a*

   $$\begin{cases} a^2+b^2 \geq 2ab \\ a^2+c^2 \geq 2ac \\ b^2+c^2 \geq 2bc \end{cases}$$

   *en ajoutant ces inégalités membre à membre on obtient*

   $$2a^2+2b^2+2c^2 \geq 2ab+2ac+2bc$$

   *c'est équivaut à*

   $$2\left(a^2+b^2+c^2\right) \geq 2\left(ab+ac+bc\right)$$

   *c'est équivaut à*

   $$a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc.$$

**b)** *On déduit que :* $a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b)(c+d)$.

*On a*

$$\begin{cases} b^2+d^2 \geq 2bd \\ a^2+c^2 \geq 2ac \\ b^2+c^2 \geq 2bc \\ a^2+d^2 \geq 2ad \end{cases}$$

*en ajoutant ces inégalités membre à membre on obtient*

$$2a^2+2b^2+2c^2+2d^2 \geq 2ad+2ac+2bc+2bd$$

*c'est équivaut à*

$$2\left(a^2+b^2+c^2+d^2\right) \geq 2(ad+ac+bc+bd)$$

*c'est équivaut à*

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq ac+ad+bc+bd$$

*et comme* $(a+b)(c+d) = ac+ad+bc+bd$ *donc*

$$a^2+b^2+c^2+d^2 \geq (a+b)(c+d).$$

**Exercice 5** .

*Soient* $x$ *et* $y$ *deux réels tels que :* $2 \leq x \leq 5$ *et* $-4 \leq y \leq -2$.

♣ *On encadre* $x \times y$ :

*On a* $-4 \leq y \leq -2$ *alors* $2 \leq -y \leq 4$ *et comme* $2 \leq x \leq 5$ *donc*

$$4 \leq -x \times y \leq 20$$

*c'est-à-dire*

$$-20 \leq x \times y \leq -4$$

♣ *On encadre* $\frac{x}{y}$ :

*On a :* $\frac{x}{y} = x \times \frac{1}{y}$.

*Comme* $2 \leq -y \leq 4$ *alors* $\frac{1}{4} \leq \frac{-1}{y} \leq \frac{1}{2}$ *et puisque* $2 \leq x \leq 5$ *donc*

$$\frac{1}{2} \leq -x \times \frac{1}{y} \leq \frac{5}{2}$$

*c'est-à-dire*

$$-\frac{5}{2} \leq \frac{x}{y} \leq \frac{-1}{2}$$

♣ *On encadre :* $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} = x^2+y^2 \times \dfrac{1}{x-y}$.

*On a :* $\dfrac{x^2+y^2}{x-y} = x^2+y^2 \times \dfrac{1}{x-y}$.

*On a* $-4 \leq y \leq -2$ *et* $2 \leq x \leq 5$ *alors* $4 \leq y^2 \leq 16$ *et* $4 \leq x^2 \leq 25$ *par suite*

$$8 \leq x^2+y^2 \leq 41 \qquad (1)$$

. *D'autre part on a* $2 \leq -y \leq 4$ *et* $2 \leq x \leq 5$ *alors* $2+2 \leq x+(-y) \leq 4+5$ *c'est-à-dire* $4 \leq x-y \leq 9$ *donc*

$$\frac{1}{9} \leq \frac{1}{x-y} \leq \frac{1}{4} \qquad (2)$$

*D'après* (1) *et* (2) *on en déduit que*

$$8 \times \frac{1}{9} \leq x^2+y^2 \times \frac{1}{x-y} \leq 41 \times \frac{1}{4}$$

*donc*

$$\frac{8}{9} \leq \frac{x^2+y^2}{x-y} \leq \frac{41}{4}$$

**Exercice 6** .

1. *Simplifions A.*

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{\frac{1}{\left(3-\sqrt{10}\right)^2}} - \sqrt{\frac{1}{\left(3+\sqrt{10}\right)^2}} \\
&= \sqrt{\left(\frac{1}{3-\sqrt{10}}\right)^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right)^2} \\
&= \left|\frac{1}{3-\sqrt{10}}\right| - \left|\frac{1}{3+\sqrt{10}}\right| \\
&= \frac{1}{\left|3-\sqrt{10}\right|} - \frac{1}{\left|3+\sqrt{10}\right|} \\
&= \frac{1}{-\left(3-\sqrt{10}\right)} - \frac{1}{3+\sqrt{10}} \qquad \textit{car} \;\; 3+\sqrt{10} > 0 \;\textit{ et }\; 3-\sqrt{10} < 0 \\
&= \frac{-1}{3-\sqrt{10}} - \frac{1}{3+\sqrt{10}} \\
&= \frac{-\left(3+\sqrt{10}\right) - \left(3-\sqrt{10}\right)}{\left(3-\sqrt{10}\right)\left(3+\sqrt{10}\right)} \\
&= \frac{-6}{9-10} = 6
\end{aligned}$$

2. *Simplifions $E$.*

*Soient $a$ et $b$ deux réels tels que $3 < a < b$.*

$$\begin{aligned} E &= \sqrt{(a-b)^2} + \sqrt{(3-a)^2} - (b-2) \\ &= |a-b| + |3-a| - (b-2) \end{aligned}$$

*On a $3 < a < b$ alors $a < b$ c'est-à-dire $a - b < 0$ donc*

$$|a-b| = -(a-b) = -a+b \qquad (1)$$

*D'autre part, on a $-b < -a < -3$ alors $3 - b < 3 - a < 0$ donc $3 - a < 0$, ce qui signifie que*

$$|3-a| = -(3-a) = -3+a \qquad (2)\,.$$

*D'après $(1)$ et $(2)$ on obtient*

$$\begin{aligned} E &= -a+b-3+a-b+2 \\ &= -1 \end{aligned}$$

3. *Simplifions $A$.*

*Soient $b \in [-3,-1]$ et $a \in [-2,5]$.*

$$\begin{aligned} A &= 2|2a+7| - |3b| + 2|b+8| - |2b-a| \\ &= 2|2a+7| + 3b + 2|b+8| - |2b-a| \end{aligned}$$

*On a $a \in [-2,5]$ c'est-à-dire $-2 \leq a \leq 5$ alors $-4 \leq 2a \leq 10$ par suite $3 \leq 2a+7 \leq 17$ donc $2a+7 > 0$ ce qui signifie que*

$$|2a+7| = 2a+7 \qquad (1)\,.$$

*On a $b \in [-3,-1]$ c'est-à-dire $-3 \leq b \leq -1$ alors $5 \leq b+8 \leq 7$ donc $b+8 > 0$ ce qui signifie que*

$$|b+8| = b+8 \qquad (2)\,.$$

*On a $-5 \leq -a \leq 2$ et $-6 \leq 2b \leq -2$ alors $-11 \leq 2b-a \leq 0$ donc $2b-a \leq 0$ d'où*

$$|2b-a| = -(2b-a) = -2b+a \qquad (3)$$

*D'après $(1)$, $(2)$ et $(3)$ on obtient*

$$\begin{aligned} A &= 2(2a+7) + 3b + 2(b+8) - (-2b+a) \\ &= 4a+14+3b+2b+16+2b-a \\ &= 3a+7b+30 \end{aligned}$$

**Exercice 7** *.*

1. *Montrons que :* $a \in [-5, 1]$.

*Soit* $a$ *un réel, tel que*

$$\begin{array}{rcl} |a+2| & \leq & 3 \\ Eq & : & -3 \leq a+2 \leq 3 \\ Eq & : & -3-2 \leq a \leq 3-2 \\ Eq & : & -5 \leq a \leq 1 \\ Eq & : & a \in [-5, 1] \end{array}$$

2. *Montrons que :* $|a+b-1| \leq 7$.

*On a* $-5 \leq a \leq 1$ *et* $-1 \leq b \leq 4$ *alors* $-5-1 \leq a+b \leq 1+4$ *c'est-à-dire* $-6 \leq a+b \leq 5$ *par suite* $-7 \leq a+b-1 \leq 6$ *et comme* $6 \leq 7$ *alors* $-7 \leq a+b-1 \leq 7$ *donc*

$$|a+b-1| \leq 7.$$

3. *On pose :* $E = ab + 6b - 5a$.

**a)** *Vérifions que :* $E = (a+6)(b-5) + 30$.

$$\begin{array}{rcl} E & = & ab + 6b - 5a \\ & = & a(b-5) + 6b \\ & = & a(b-5) + 6b + 30 - 30 \\ & = & a(b-5) + 6(b-5) + 30 \\ & = & (b-5)(a+6) + 30 \\ & = & (a+6)(b-5) + 30 \end{array}$$

**b)** *Encadrement pour le nombre* $E$.

*On a* $-5 \leq a \leq 1$ *et* $-1 \leq b \leq 4$ *alors* $1 \leq a+6 \leq 7$ *et* $-6 \leq b-5 \leq -1$ *par suite* $1 \leq -(b-5) \leq 6$ *donc* $1 \leq -(b-5)(a+6) \leq 42$ *c'est-à-dire*

$$-42 \leq (b-5)(a+6) \leq -1$$

*d'où*

$$-12 \leq E \leq 29$$

**Exercice 8** .

*On pose :* $A = x + y - 6xy$. *Soient* $x$ *et* $y$ *deux réels de l'intervalle* $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

1. *Montrons que :* $\frac{-1}{3} \leq 2y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$ *et* $\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{2} - 3x \leq \frac{1}{2}$

*On a* $x \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ *et* $y \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ *c'est-à-dire* $0 \leq x \leq \frac{1}{3}$ *et* $0 \leq y \leq \frac{1}{3}$ *alors* $-1 \leq -3x \leq 0$ *et* $0 \leq 2y \leq \frac{2}{3}$ *donc*

$$\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{2} - 3x \leq \frac{1}{2} \quad et \quad \frac{-1}{3} \leq 2y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$$

2. *Vérifions que :* $\left|A-\frac{1}{6}\right|=\left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|$

   *Soient* $x\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$ *et* $y\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

$$\begin{aligned}\left|A-\frac{1}{6}\right| &= \left|x+y-6xy-\frac{1}{6}\right|\\ &= \left|6x\left(\frac{1}{6}-y\right)-\left(\frac{1}{6}-y\right)\right|\\ &= \left|\left(\frac{1}{6}-y\right)(6x-1)\right|\\ &= \left|2\left(\frac{1}{6}-y\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)\right|\\ &= \left|\left(\frac{1}{3}-2y\right)\left(3x-\frac{1}{2}\right)\right|\\ &= \left|\left(\frac{1}{2}-3x\right)\left(2y-\frac{1}{3}\right)\right|\\ &= \left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|\end{aligned}$$

3. *On déduit que :* $A\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

   *On a* $\frac{-1}{3}\leq 2y-\frac{1}{3}\leq\frac{1}{3}$ *et* $\frac{-1}{2}\leq\frac{1}{2}-3x\leq\frac{1}{2}$ *c'est équivaut à* $\left|2y-\frac{1}{3}\right|\leq\frac{1}{3}$ *et* $\left|\frac{1}{2}-3x\right|\leq\frac{1}{2}$ *par suite* $\left|\frac{1}{2}-3x\right|\left|2y-\frac{1}{3}\right|\leq\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}$ *c'est-à-dire* $\left|A-\frac{1}{6}\right|\leq\frac{1}{6}$ *c'est équivaut à* $\frac{-1}{6}\leq A-\frac{1}{6}\leq\frac{1}{6}$ *donc*

$$0\leq A\leq\frac{1}{3}$$

   *ce qui signifie que :* $A\in\left[0,\frac{1}{3}\right]$.

**Exercice 9** .

*On donne :* $|x-1|<\frac{1}{2}$.

1. *Montrons que :* $|x^2-1|<\frac{5}{4}$.

*Soit $x$ un réel, on a*

$$\begin{aligned} |x-1| &< \frac{1}{2} \\ Eq &: -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \\ Eq &: -\frac{1}{2}+1 < x < \frac{1}{2}+1 \\ Eq &: \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \end{aligned}$$

*On encadre :* $x^2-1$.

*On a* $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ *alors* $\frac{1}{4} < x^2 < \frac{9}{4}$ *par suite* $\frac{1}{4}-1 < x^2-1 < \frac{9}{4}-1$ *c'est-à-dire* $\frac{-3}{4} < x^2-1 < \frac{5}{4}$ *et comme* $\frac{-5}{4} < \frac{-3}{4}$ *alors* $\frac{-5}{4} < x^2-1 < \frac{5}{4}$ *, donc*

$$\left|x^2-1\right| < \frac{5}{4}$$

2. *Montrons que :* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}$.

   *On a* $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2}$ *alors* $1 < 2x < 3$ *par suite* $2 < 2x+1 < 4$ *donc*

$$\frac{1}{4} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}.$$

3. *On déduit que :* $\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < \frac{1}{4}$.

   *On a*

$$\begin{aligned} \left|\frac{x-1}{2x+1}\right| &= \frac{|x-1|}{|2x+1|} \\ &= |x-1| \times \frac{1}{|2x+1|} \\ &= |x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| \end{aligned}$$

*On a* $\frac{1}{4} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}$ *et comme* $\frac{-1}{2} < \frac{1}{4}$ *alors* $\frac{-1}{2} < \frac{1}{2x+1} < \frac{1}{2}$ *donc* $\left|\frac{1}{2x+1}\right| < \frac{1}{2}$ *et puisque* $|x-1| < \frac{1}{2}$ *donc*

$$|x-1| \times \left|\frac{1}{2x+1}\right| < \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$$

*ce qui signifie que*

$$\left|\frac{x-1}{2x+1}\right| < \frac{1}{4}.$$

**Exercice 10** .

1. *On vérifie que :* $\dfrac{1+x}{1+2x}-(1-x)=\dfrac{2x^2}{1+2x}$.

   *Soit* $x\in\left[\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$.

$$\begin{aligned}\frac{1+x}{1+2x}-(1-x) &= \frac{1+x-(1-x)(1+2x)}{1+2x}\\ &= \frac{1+x-(1+2x-x-2x^2)}{1+2x}\\ &= \frac{1+x-(1+x-2x^2)}{1+2x}\\ &= \frac{1+x-1-x+2x^2}{1+2x}\\ &= \frac{2x^2}{1+2x}\end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $\dfrac{2}{1+2x}\leq 6$.

   *Soit* $x\in\left[\dfrac{-1}{3},\dfrac{1}{3}\right]$.

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+2x}-6 &= \frac{2-6(1+2x)}{1+2x}\\ &= \frac{2-6-12x}{1+2x}\\ &= \frac{-4-12x}{1+2x}\\ &= \frac{-4(1+3x)}{1+2x}\end{aligned}$$

   *On a* $\dfrac{-1}{3}\leq x\leq\dfrac{1}{3}$ *alors* $\dfrac{-2}{3}\leq 2x\leq\dfrac{2}{3}$ *par suite* $\dfrac{1}{3}\leq 1+2x\leq\dfrac{5}{3}$ *donc* $1+2x>0$. (1)
   *D'autre part, on a* $-1\leq 3x\leq 3$ *par suite* $0\leq 1+3x\leq 4$ *donc* $-16\leq -4(1+3x)\leq 0$
   *d'où* $-4(1+3x)\leq 0 \quad (2)$.

   *D'après* (1) *et* (2) *on en déduit que* $\dfrac{-4(1+3x)}{1+2x}\leq 0$ *ce qui entraine que*

$$\frac{2}{1+2x}-6\leq 0.$$

   *Donc*

$$\frac{2}{1+2x}\leq 6.$$

♣ *On déduit que :* $\left|\dfrac{1+x}{1+2x}-(1-x)\right| \leq 6x^2.$

*On a* $\dfrac{2}{1+2x} \leq 6$ *et comme* $-6 \leq \dfrac{2}{1+2x}$ *alors* $-6 \leq \dfrac{2}{1+2x} \leq 6$ *donc*

$$\left|\frac{2}{1+2x}\right| \leq 6$$

*de plus*

$$\left|\frac{2}{1+2x}\right| x^2 \leq 6x^2$$

*comme* $x^2 = |x^2|$ *alors* $\left|\dfrac{2x^2}{1+2x}\right| \leq 6x^2.$

*D'autre part, on a* $\dfrac{1+x}{1+2x}-(1-x) = \dfrac{2x^2}{1+2x}$ *donc on obtient*

$$\left|\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)\right| = \left|\frac{2x^2}{1+2x}\right|$$

*et on sait que* $\left|\dfrac{2x^2}{1+2x}\right| \leq 6x^2$ *donc*

$$\left|\frac{1+x}{1+2x}-(1-x)\right| \leq 6x^2.$$

3. *On prend* $x = 0,2$ *alors on obtient d'après l'inégalité précédente*

$$\left|\frac{1,2}{1,4}-\frac{4}{5}\right| \leq 0,24$$

*donc* $\dfrac{4}{5}$ *est une valeur approchée à* $\dfrac{1,2}{1,4}$ *par la précision* $2,4 \times 10^{-1}.$

**Exercice 11** .

1. *On suppose que* $x \in [0,1]$ *et on montre que* $\dfrac{1}{1+x} \in \left[\dfrac{1}{2},1\right].$

   *On a* $x \in [0,1]$ *c'est-à-dire* $0 \leq x \leq 1$ *alors* $1 \leq x+1 \leq 2$ *donc* $\dfrac{1}{2} \leq \dfrac{1}{1+x} \leq 1,$ *ceci signifie que* $\dfrac{1}{1+x} \in \left[\dfrac{1}{2},1\right].$

2. *Montrons que :* $\left|\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+y}\right| \leq |x-y|\,.$

   *Soit* $x \in [0,1]$ *et* $y \in [0,1]\,.$

*On a*

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y} &= \frac{1+y-(1+x)}{(1+x)(1+y)}\\ &= \frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\end{aligned}$$

*donc on obtient*

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right| &= \left|\frac{y-x}{(1+x)(1+y)}\right|\\ &= \frac{|y-x|}{|(1+x)(1+y)|}\\ &= |x-y|\times\frac{1}{|(1+x)(1+y)|} \qquad (\textit{On a } |y-x|=|x-y|)\\ &= |x-y|\times\frac{1}{(1+x)(1+y)} \qquad (\ (1+x)(1+y)>0)\end{aligned}$$

*comme* $x\in[0,1]$ *et* $y\in[0,1]$ *alors* $\dfrac{1}{1+x}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ *et* $\dfrac{1}{1+y}\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$ *donc*

$$\frac{1}{4}\leq\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq 1$$

*puisque* $|x-y|\geq 0$ *alors*

$$\frac{|x-y|}{4}\leq |x-y|\times\frac{1}{(1+x)(1+y)}\leq |x-y|$$

*ce qui entraine que* $\dfrac{|x-y|}{4}\leq\left|\dfrac{1}{1+x}-\dfrac{1}{1+y}\right|\leq |x-y|$ *donc*

$$\left|\frac{1}{1+x}-\frac{1}{1+y}\right|\leq |x-y|$$

*3. On pose :* $0,866<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0,867$ *et* $0,707<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0,708.$

**a)** *On a* $0,707<\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0,708$ *alors* $-0,708<-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<-0,707$ *et comme* $0,866<\dfrac{\sqrt{3}}{2}<0,867$ *alors*

$$0,158<\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}<0,160$$

♣ $0,160$ *est une valeur approchée par excès de* $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *à* $2\times 10^{-3}$.

♣ $0,158$ *est une valeur approchée par défaut de* $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ *à* $2\times 10^{-3}$.

**b)** *On déduit que :* $\left|\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\right|<0,2.$

*On prend* $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ *et* $y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ *on obtient*

$$\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|$$

*comme* $-0,2<0,158<\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0,160<0,2$ *alors* $-0,2<\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}<0,2$ *donc*

$$\left|\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|<0,2$$

*et comme* $\left|\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}}-\dfrac{1}{1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}}\right|\leq\left|\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|$ *donc*

$$\left|\frac{1}{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}-\frac{1}{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}\right|<0,2.$$

**Exercice 12 .**

*On pose :* $A=\sqrt{x^2+1}-|x|$ *et* $B=\sqrt{x^2+1}+|x|$ .

1. ♣ *Montrons que :* $A>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

   *Soit* $x\in\mathbb{R}$.

   *On a*

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{x^2+1}-|x| \\ &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}-|x|\right)\left(\sqrt{x^2+1}+|x|\right)}{\sqrt{x^2+1}+|x|} \\ &= \frac{(x^2+1)-|x|^2}{\sqrt{x^2+1}+|x|} \\ &= \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+|x|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+|x|}>0 \end{aligned}$$

   *ceci signifie que* $A>0$ *pour tout* $x\in\mathbb{R}$.

♣ *On déduit que* : $B > 2|x|$

*Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$B - 2|x| = \sqrt{x^2+1} + |x| - 2|x| = \sqrt{x^2+1} - |x| = A$$

*comme* $A > 0$ *alors* $B - 2|x| > 0$ *donc* $B > 2|x|$.

2. ♣ *Calculons* $AB$.

*Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} AB &= \left(\sqrt{x^2+1} - |x|\right)\left(\sqrt{x^2+1} + |x|\right) \\ &= \left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - |x|^2 \\ &= \left(x^2+1\right) - x^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

♣ *On déduit que* : $A < \dfrac{1}{2|x|}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.

*Soit* $x \in \mathbb{R}^*$.

*On a* $AB = 1$ *alors* $B = \dfrac{1}{A}$ *et puisque* $B > 2|x|$ *alors* $\dfrac{1}{A} > 2|x|$ *donc*

$$A < \frac{1}{2|x|}$$

3. *On déduit que* : $|x| < \sqrt{x^2+1} < |x| + \dfrac{1}{2|x|}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$.

*Soit* $x \in \mathbb{R}^*$.

*On a* $A > 0$ *alors* $\sqrt{x^2+1} - |x| > 0$ *donc* $\sqrt{x^2+1} > |x|$ $(1)$.

*D'autre part, on a* $A < \dfrac{1}{2|x|}$ *alors* $\sqrt{x^2+1} - |x| < \dfrac{1}{2|x|}$ *donc*

$$\sqrt{x^2+1} < |x| + \frac{1}{2|x|} \quad (2).$$

*D'après* $(1)$ *et* $(2)$ *on en déduit que pour tout* $x \in \mathbb{R}^*$ :

$$|x| < \sqrt{x^2+1} < |x| + \frac{1}{2|x|}$$

4. *On prend* $x = 11$ *alors on obtient d'après l'encadrement précédent*

$$11 < \sqrt{122} < 11 + \frac{1}{22}$$

*c'est-à-dire* $11 < \sqrt{122} < \dfrac{243}{22}$ *par suite* $\dfrac{11}{3} < \dfrac{\sqrt{122}}{3} < \dfrac{243}{66}$ $\quad$ (♣)

*donc* (♣) *est un encadrement pour le nombre* $\dfrac{\sqrt{122}}{3}$ *d'amplitude* $\dfrac{243}{66} - \dfrac{11}{3} = \dfrac{1}{66}$.

**Exercice 13** .

*Soit $x$ un réel tel que $x>1$ on pose :* $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$.

1. *Montrons que :* $A-1=\dfrac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}$.

   *Soit* $x>1$.

$$\begin{aligned}
A-1 &= \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}-1\\
&= \frac{\sqrt{x}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x-1}}\\
&= \frac{\left(\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\right)\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{\sqrt{x^2}-\sqrt{(x-1)^2}}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{|x|-|x-1|}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{x-x+1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)}
\end{aligned}$$

2. **a)** *Vérifions que :* $2\sqrt{x-1}\leq\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\leq 2\sqrt{x}$

   *Soit* $x>1$.

$$\begin{aligned}
2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) &= 2\sqrt{x-1}-\sqrt{x}-\sqrt{x-1}\\
&= \sqrt{x-1}-\sqrt{x}
\end{aligned}$$

*on a* $-1\leq 0$ *alors* $x-1\leq x$ *par suite* $\sqrt{x-1}\leq\sqrt{x}$ *donc* $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\leq 0$ *d'où* $2\sqrt{x-1}-\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)\leq 0$ *c'est-à-dire*

$$2\sqrt{x-1}\leq\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\qquad(1)$$

*D'autre part, on a*

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}=\sqrt{x-1}-\sqrt{x}$$

*comme* $\sqrt{x-1}-\sqrt{x}\leq 0$ *alors* $\sqrt{x}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x}\leq 0$ *donc*

$$\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\leq 2\sqrt{x}\qquad(2)$$

*D'après* (1) *et* (2) *on obtient*

$$2\sqrt{x-1}\leq\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\leq 2\sqrt{x}$$

**b)** *Soit* $x > 1$.

*On a* $2\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \leq 2\sqrt{x}$ *alors*

$$2(x-1) \leq \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right) \leq 2\sqrt{x}\sqrt{x-1}$$

*donc*

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq \frac{1}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x}+\sqrt{x-1}\right)} \leq \frac{1}{2(x-1)}$$

*c'est-à-dire*

$$\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq A-1 \leq \frac{1}{2(x-1)}$$

*3.* **a)** *Montrons que :* $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$.

*Soit* $x > 1$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x} - \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}} &= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x}\sqrt{x-1}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{\sqrt{x(x-1)}-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \\
&= \frac{x(x-1)-x^2}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)} \\
&= \frac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)}
\end{aligned}$$

*comme* $-x < -1$ *et* $-1 < 0$ *alors* $-x < 0$ *et on sait que*

$$x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right) > 0$$

*donc* $\dfrac{-x}{x\sqrt{x}\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x(x-1)}+x\right)} \leq 0$ *c'est-à-dire*

$$\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$$

**b)** *On déduit que :* $1 + \dfrac{1}{2x} \leq A \leq \dfrac{1}{2(x-1)} + 1$.

*Soit* $x > 1$.

*On a* $\dfrac{1}{x} \leq \dfrac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ *alors* $\dfrac{1}{2x} \leq \dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ *et comme* $\dfrac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq A-1$ *alors* $\dfrac{1}{2x} \leq A-1$ *par suite*

$$\frac{1}{2x} \leq A-1 \leq \frac{1}{2(x-1)}$$

*donc*

$$1+\frac{1}{2x}\leq A\leq \frac{1}{2\,(x-1)}+1$$

4. *Soit* $x>1$.

   *On a* $1+\dfrac{1}{2x}\leq A\leq \dfrac{1}{2\,(x-1)}+1$ *et comme* $A=\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ *alors*

$$1+\frac{1}{2x}\leq \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}\leq \frac{1}{2\,(x-1)}+1$$

   *par suite*

$$\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}\leq \sqrt{x}\leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}$$

   *donc*

$$\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{2x}-\frac{9}{4}\leq \sqrt{x}-\frac{9}{4}\leq \frac{1}{2\sqrt{x-1}}+\sqrt{x-1}-\frac{9}{4}$$

   *On prend* $x=5$ *on obtient*

$$-\frac{1}{20}\leq \sqrt{5}-\frac{9}{4}\leq 0$$

   *et comme* $0\leq \dfrac{1}{20}$ *alors* $-\dfrac{1}{20}\leq \sqrt{5}-\dfrac{9}{4}\leq \dfrac{1}{20}$ *donc*

$$\left|\sqrt{5}-\frac{9}{4}\right|\leq \frac{1}{20}.$$

   *D'où le nombre* $\dfrac{9}{4}$ *est une valeur approchée de* $\sqrt{5}$ *à la précision* $\dfrac{1}{20}$.

# FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

**www.etude – generale.com**