Correction de la série d'exercices N2 sur les fonctions numériques

Exercice 1 .

On considère la fonction numérique h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*
$$\begin{cases} h(x) = -x+3 \ , \ si\ x \in [1,+\infty[\\ h(x) = 4x^2-2 \ , \ si\ x \in [-1,1] \\ h(x) = x+3 \ , \ si\ x \in]-\infty,-1] \end{cases}$$

(C_h) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. *Montrons que la fonction* h *est paire.*

   On a $D_h = \mathbb{R}$.

   Pour tout $x \in D_h$, *on a* $-x \in D_h$.

   Soit $x \in D_h$

   ♣ Si $x \in [1,+\infty[$ *alors* $-x \in]-\infty,-1[$ *on a* $h(-x) = -x+3 = h(x)$

   ♣ Si $x \in [-1,1]$ *alors* $-x \in [-1,1]$ *on a* $h(-x) = 4x^2-2 = h(x)$

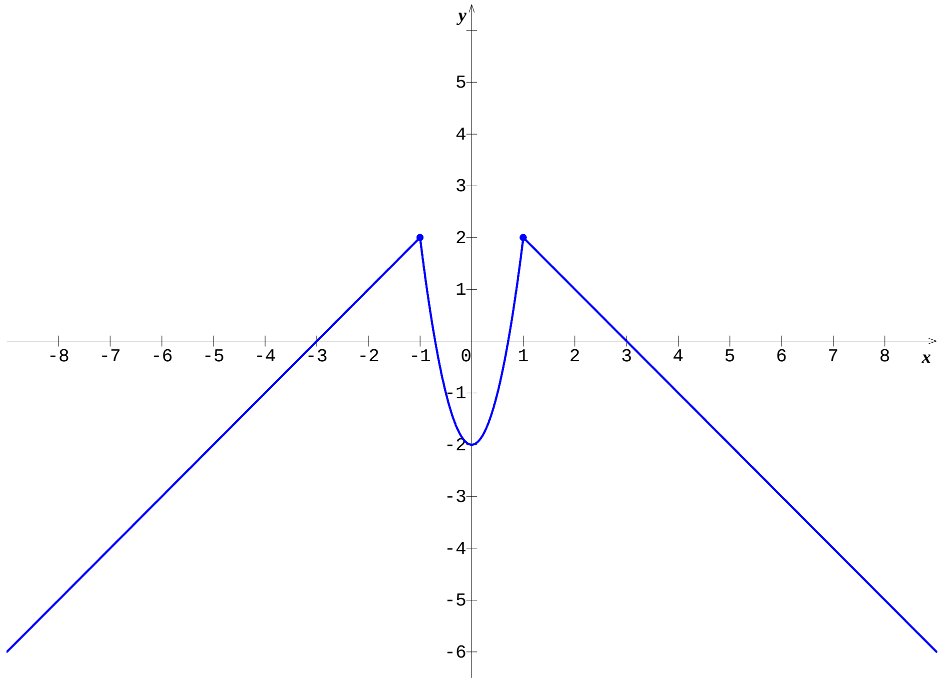
   ♣ Si $x \in]-\infty,-1[$ *alors* $-x \in [1,+\infty[$ *on a* $h(-x) = x+3 = h(x)$

   On déduit que la fonction h *est paire.*

2. **a)** $h(0) = -2, \ \ h(1) = 2, \ \ h(2) = 1, \ \ h(-1) = 2$ *et* $h(-2) = 1$.

   b) *La courbe* (C_h) *est composée de deux demi-droites sur les* 2 *intervalles* $[1,+\infty[$ *et*

$]-\infty,-1]$, *sur l'intervalle* $[-1,1]$ (C_h) *est une parabole de sommet* $S(0,-2)$.



c) *On cherche le nombre de solutions de l'équation* $(E): h(x) = m$.

- ♣ Si $m \in]-\infty,-2[$ *alors l'équation* (E) *admet* 2 *solutions.*
- ♣ Si $m = -2$ *alors l'équation* (E) *admet* 3 *solutions.*
- ♣ Si $m \in]-2,2[$ *alors l'équation* (E) *admet* 4 *solutions.*
- ♣ Si $m = 2$ *alors l'équation* (E) *admet* 2 *solutions.*
- ♣ Si $m \in]2,+\infty[$ *alors l'équation* (E) *n'admet pas de solutions.*

Exercice 2 .

Soit f *la fonction numérique définie par :* $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + 2x$

et (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1. **a)** *On a :* $a = \dfrac{1}{4} > 0$. *Donc la fonction* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-4]$ *et strictement croissante sur* $[-4,+\infty[$. *D'où*

x	$-\infty$		-4		$+\infty$
f		$\searrow$	-4	$\nearrow$	

b) *Les points d'intersection de la courbe* (C_f) *avec les axes du repère.*

♣ *Les points d'intersection de la courbe* (C_f) *avec l'axe des abcisses.*
On a

$$M(x,y) \in (C_f) \cap (Ox) \iff (y = f(x) \quad et\ y = 0)$$

On résout l'équation $f(x) = 0$ *dans* $\mathbb{R}$.

$$f(x) = 0 \iff \frac{1}{4}x^2 + 2x = 0 \iff x = -8 \quad ou \quad x = 0$$

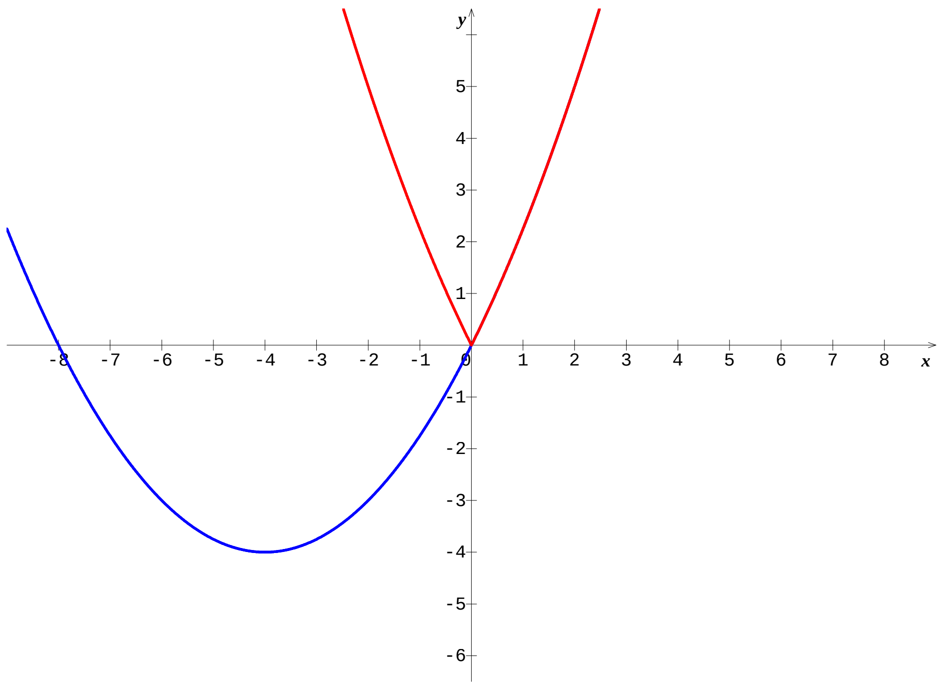
donc

$$(C_f) \cap (Ox) = \{A(-8,0),\ O(0,0)\}$$

♣ *Les points d'intersection de la courbe* (C_f) *avec l'axe des ordonées.*
On a $f(0) = 0$, *donc*

$$(C_f) \cap (Oy) = \{\ O(0,0)\}$$

c) (C_f) *c'est une parabole de sommet* $S(-4,-4)$ *et d'axe de symétrie la droite d'équation* $x = -4$.



d) *Graphiquement on a* $f([-4,-2]) = [-4,-3]$.

e) *L'ensemble des solutions de l'équation* $f(x) = 0$ *est* $S = \{-8, 0\}$.

f) *Les solutions de l'inéquation* $f(x) \geq 0$ *sont les abscisses des points de la courbe* (C_f) *au-dessus de la droite d'équation* $y = 0$. *Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est*

$$S =]-\infty, -8] \cup [0, +\infty[$$

2. *On considère la fonction* h *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $h(x) = f(|x|)$

a) *On étudie la parité de la fonction h.*

Pour tout $x \in D_h$, on a $-x \in D_h$.

Soit $x \in D_h$, on a

$$h(-x) = f(|-x|) = f(|x|) = h(x)$$

donc la fonction h est paire.

b) *Soit $x \in \mathbb{R}^+$, alors $|x| = x$ donc $h(x) = f(|x|) = f(x)$.*

Le tableau de variation de la fonction h :

On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $h(x) = f(x)$. Donc la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et comme elle est paire donc h est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$. D'où

x	$-\infty$		0		$+\infty$
h		$\searrow$	0	$\nearrow$	

c) *La courbes (C_f) et (C_h) sont confondues sur $\mathbb{R}^+$. La courbe (C_h) est symétrie par rapport à l'axe des ordonnées car la fonction h est paire. (Voir la figure)*

Exercice 3 .

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \dfrac{2x-3}{x-2}$.

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

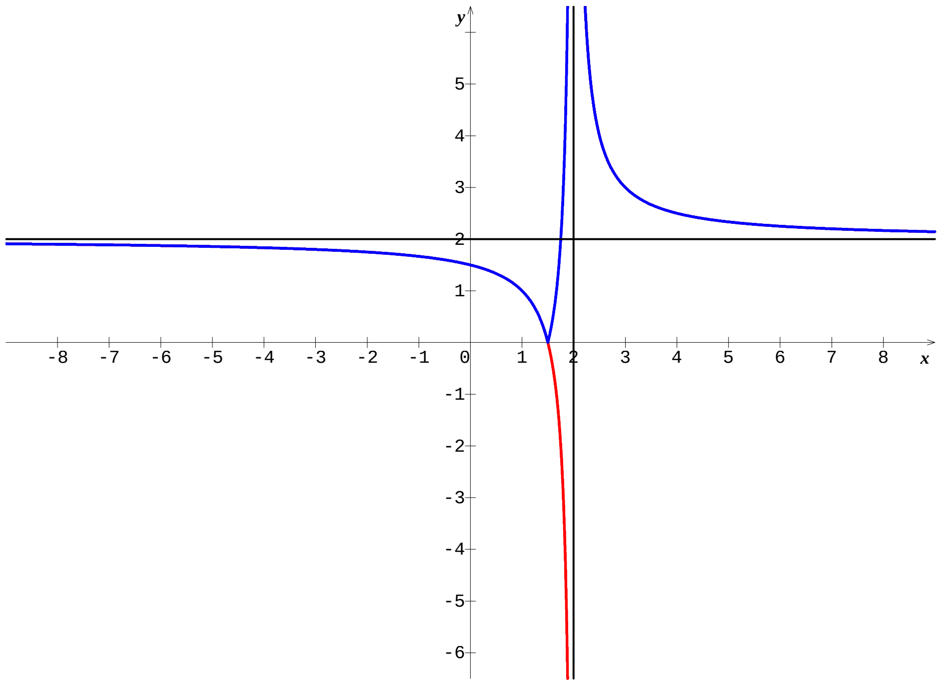
1. *On cherche D_f :*

   On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x-2 \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$.

2. **a)** *On a $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1$. Donc la fonction f est strictement décroissante sur les deux intervalles $]-\infty, 2[$ et $]2, +\infty[$.*

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

b) *La courbe (C_f) est l'hyperbole de centre $S(2,2)$ et d'asymptotes les droites d'équations* *respectives* $x = 2$ *et* $y = 2$.



c) *On cherche* $f\left(]2,3]\right)$:

Graphiquement on obtient : $f\left(]2,3]\right) = [3, +\infty[$.

3. *On considère la fonction* h *définie par :* $h(x) = |f(x)|$.

a) *On cherche* D_h :

On a

$$D_h = \{x \in \mathbb{R} / \ |x-2| \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash \{2\} =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$$

b) *On trace* (C_h) :

♣ Si $x \in \left]-\infty, \frac{3}{2}\right] \cup]2, +\infty[$, *alors* $h(x) = f(x)$. *Donc les courbes* (C_f) *et* (C_h) *sont confondues sur les deux intervalles* $\left]-\infty, \frac{3}{2}\right]$ *et* $]2, +\infty[$.

♣ Si $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right[$, *alors* $h(x) = -f(x)$. *Donc les courbes* (C_f) *et* (C_h) *sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses sur l'intervalle* $\left[\frac{3}{2}, 2\right[$.

Exercice 4 .

On considère les fonctions numériques f *et* h *définies par :* $f(x) = x^2 + 2x$ *et* $h(x) = \dfrac{-x}{x+1}$.

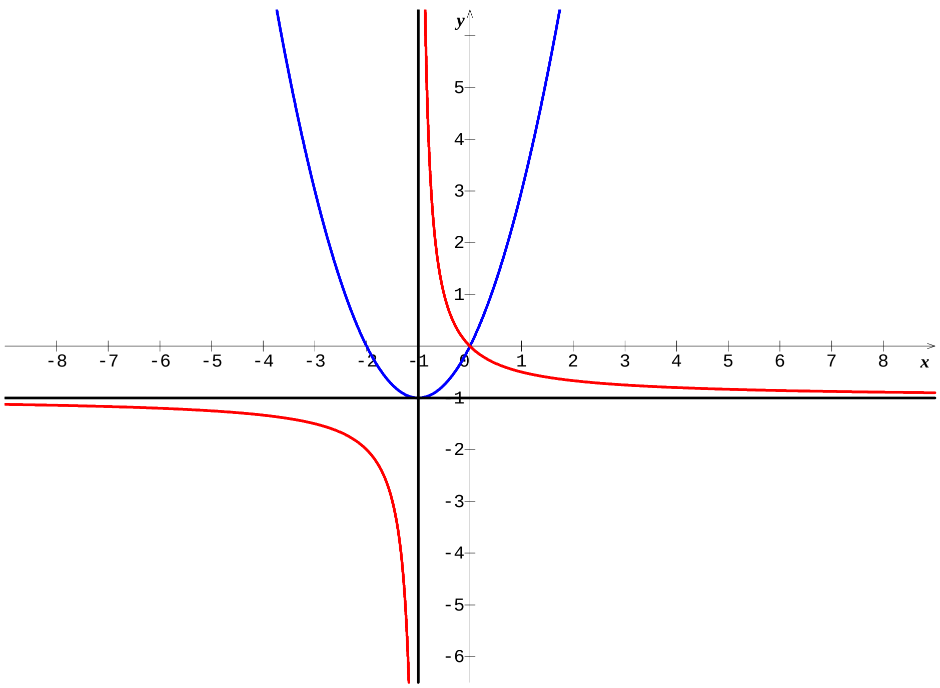
1. **a)** *On cherche le T.V de la fonction* f.

On a $a = 1 > 0$ *et* $\dfrac{-b}{2a} = \dfrac{-2}{2\times 1} = -1$. *Donc la fonction* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-1]$ *et strictement croissante sur* $[-1,+\infty[$. *D'où*

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
f		$\searrow$	-1	$\nearrow$	

b) (C_f) *c'est une parablole de sommet* $S(-1,-1)$ *et d'axe de symétrie la droite d'équation* $x=-1$.

c) *On a* $f(-1) = -1$, $f(0) = 0$ *et* $f(1) = 3$.



d) *On cherche garphiquement le nombre de solutions de l'équation* $(E) : f(x) = m$. *Le nombre de solutions de l'équation sont les points d'intersection de la courbe* (C_f) *et la droite d'équation* $y = m$

- ♣ Si $m \in]-\infty,-1[$ *alors l'équation* (E) *n'admet aucune solution.*
- ♣ Si $m = -1$ *alors l'équation* (E) *admet unique solution.*
- ♣ Si $m \in]1,+\infty[$ *alors l'équation* (E) *admet* 2 *solutions.*

2. **a)** *On a* $D_h = \{x \in \mathbb{R} / \ x+1 \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{-1\} =]-\infty,-1[\cup]-1,+\infty[$. $h\left(\dfrac{-1}{2}\right) = \dfrac{1}{3}$, $h(0) = 0$ *et* $h(1) = \dfrac{-1}{2}$.

b) *On cherche le T.V de h*

On a $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$. *Donc la fonction* h *est strictement décroissante sur les deux intervalles* $]-\infty, -1[$ *et* $]-1, +\infty[$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
h		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

c) *La courbe* (C_h) *est l'hyperbole de centre* $S(-1, -1)$ *et d'asymptotes les droites d'équations respectives* $x = -1$ *et* $y = -1$. *(Voir la figure).*

3. *Graphiquement on a* $f(0) = 0$ *et* $h(0) = 0$, *donc* $f(0) = h(0)$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.

$$(x+1)^2 \geq \frac{1}{x+1} \iff x^2 + 2x \geq \frac{1}{x+1} - 1 \iff x^2 + 2x \geq \frac{-x}{x+1} \iff f(x) \geq h(x)$$

graphiquement la courbe (C_f) *est au-dessus de la courbe* (C_h) *sur les intervalles* $]-\infty, -1[$ *et* $[0, +\infty[$. *Donc*

$$S =]-\infty, -1[\cup [0, +\infty[$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**