Correction du devoir Surveillé N3

Exercice 1 .

1. *On considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $g(x) = x^3 + x + 2$.

a) $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3 + x + 2 = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} x^3 = -\infty$.

b) *On a* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{g(x)}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{x^3}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} \dfrac{g(x)}{x} = +\infty$.
La courbe (C_g) *admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

c) *La fonction* g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$g'(x) = \left(x^3 + x + 1\right)' = 3x^2 + 1$$

d) *On a* $g'(x) > 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *Donc la fonction* g *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$. *D'où*

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$g'(x)$	$+$
g	$-\infty \nearrow +\infty$

e) *La fonction* g *est* 2 *fois dérivables sur* $\mathbb{R}$. *On a*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \; g''(x) = 6x$$

Donc

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g''(x)$	$-$	0	$+$
$Concavite(C)$	$(C)concave$		$(C)convexe$

La fonction g'' *s'annule en* 0 *et change de signe donc le point* $A(0, 2)$ *est un point d'inflexion de la courbe* (C_g).

f) *On a* $g(-1)=0$*, donc*

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$g(x)$	$-$	0	$+$

2. *On considère la fonction* f *définie par :* $f(x)=x+1-\dfrac{x+1}{x^2}$.

a) *On a* $D_f=\{x\in\mathbb{R}/\ x^2\neq 0\}=\mathbb{R}^*=\left]-\infty,0\right[\cup\left]0,+\infty\right[$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x+1-\dfrac{x+1}{x^2}=+\infty$. *Car* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x+1=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} -\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

$\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x+1-\dfrac{x+1}{x^2}=-\infty$. *Car* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x+1=-\infty$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} -\dfrac{x+1}{x^2}=0$.

On calcule $\lim\limits_{x\longrightarrow0} f(x)$:

on a $\lim\limits_{x\longrightarrow0} x+1=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow0} x^2=0^+$ *car pour tout réel* $x\neq0$, $x^2>0$, *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow0} -\dfrac{x+1}{x^2}=-\infty$, *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow0} f(x)=-\infty$$

b) *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty}\left(f(x)-(x+1)\right)=\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} -\dfrac{x+1}{x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} -\dfrac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\longrightarrow\pm\infty} -\dfrac{1}{x}=0$. *Donc la courbe* (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y=x+1$ *au voisinage de* $+\infty$ *et* $-\infty$.

c) *Les fonctions* $u:x\longmapsto x+1$ *et* $v:x\longmapsto -\dfrac{x+1}{x^2}$ *sont dérivables sur* D_f*, donc la fonction* $f=u+v$ *est dérivable sur* D_f. $\left(D_{f'}=D_f\right)$.

Soit $x\in D_f$*, on a*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(x+1-\frac{x+1}{x^2}\right)' \\ &= 1-\frac{x^2-2(x+1)x}{x^4} \\ &= 1-\frac{x^2-2x^2-2x}{x^4} \\ &= 1-\frac{-x^2-2x}{x^4} \\ &= 1-\frac{-x-2}{x^3} \\ &= \frac{x^3+x+2}{x^3} \\ &= \frac{g(x)}{x^3} \end{aligned}$$

donc

$$(\forall x \in D_f)\,,\ f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$$

d) *On a* $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ *et d'après la partie* 1 *on a*

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
$x3$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{g(x)}{x3}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

d'où le tableau de variation de f

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty \,\|\, -\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

e) *Étudions le signe de la différence* $f(x) - (x+1)$ *sur* D_f :
Soit $x \in D_f$, *on a*

$$f(x) - (x+1) = -\frac{x+1}{x^2} = \frac{-(x+1)}{x^2}.$$

le signe de $f(x) - (x+1)$ *sur* D_f *est le même que celui de* $-(x+1)$.
donc

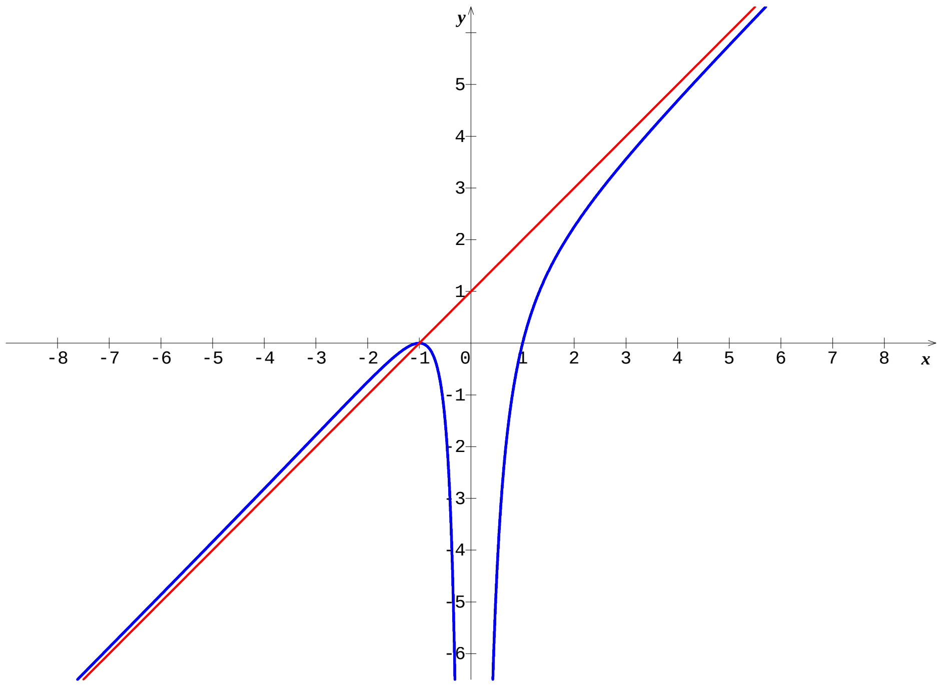
x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)-(x+1)$		$+$	0	$-$	$\|$	$-$	

♣ *La courbe* (C_f) *et au-dessus de la droite* $\Delta : y = x+1$ *sur l'intervalle* $]-\infty, -1[$.

♣ *La courbe* (C_f) *et au-dessous de la droite* $\Delta : y = x+1$ *sur les deux intervalles* $]-1, 0[$ *et* $]0, +\infty[$

♣ *La courbe* (C_f) *et* (Δ) *se coupent en point d'abscisse* -1.

f)



FIN
Yahya MATIOUI

www.etude-generale.com