Révision Générale
Analyse

Continuité

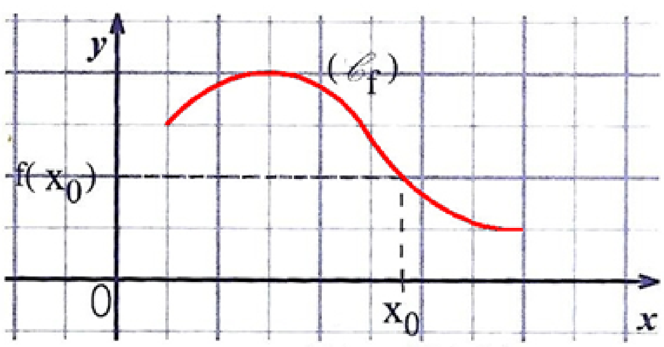
Continuité en un point

Définition 1 .

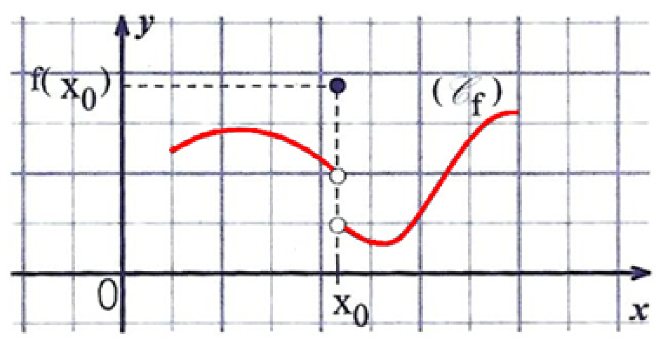
1. *Soit une fonction f définie sur un ouvert I. Soit $a \in I$.*

$$f \text{ est continue en } a \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a} f(x) = f(a)$$

2. *f est continue sur I si et seulement si f est continue en tout réel a de I.*



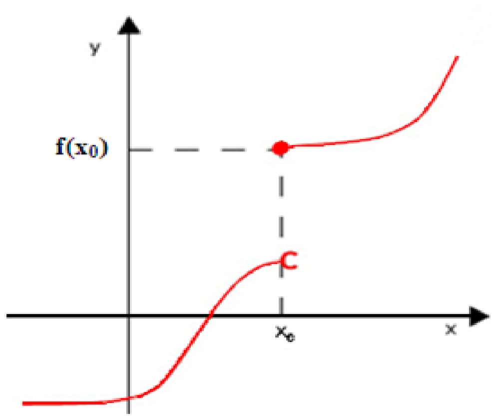
La fonction f est continue en x_0



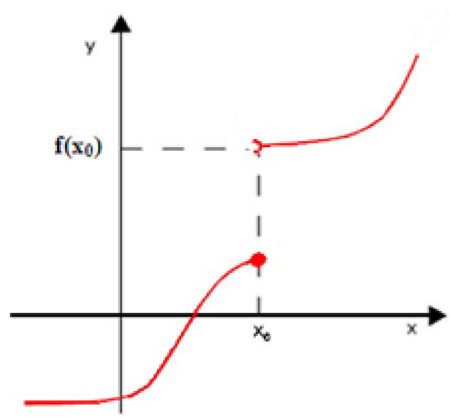
La fonction f n'est pas continue en x_0

Théorème 2 .

$$f \text{ est continue en } a \Longleftrightarrow \lim_{x \longrightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow a^-} f(x) = f(a)$$



f est continue à droite en x_0



f est continue à gauche en x_0

Fonction continues et opérations

Théorème 3 .

Soient f et g deux fonctions définies sur I. Si les fonctions f et g sont continues sur I, alors

♣ *Les fonctions $f+g$, $f\times g$ et αf sont continues sur I.*

♣ *Si la fonction g est non nulle, alors $\dfrac{f}{g}$ est continue sur I.*

♣ *Si $f\geq 0$ sur I, alors la fonction $\sqrt{f}$ est continue sur I.*

Résultats 4 .

1. *Tout fonction polynôme est continue sur $\mathbb{R}$.*
2. *Toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.*
3. *Les fonctions $x\longmapsto \sin x$ et $x\longmapsto \cos x$ sont continues sur $\mathbb{R}$.*
4. *La fonction $x\longmapsto \dfrac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$.*
5. *La fonction $x\longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.*
6. *La fonction $x\longrightarrow |x|$ est continue sur $\mathbb{R}$.*

Exemple 5 .

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=x^2+x+1 & , \text{ si } x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{\sin x}{x} & , \text{ si } x<0 \end{cases}$

Étudier la continuité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

♠ *On étudie lz continuité de la fonction en 0.*

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^+} x^2+x+1=1=f(0)$. Donc la fonction f est continue en 0 à droite.

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 0^-}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$. Donc la fonction f est continue en 0 à gauche.

D'où la fonction f est continue en 0.

♠ *On étudie la continuité de la fonction sur $]0,+\infty[$:*

f est une fonction polynôme continue sur $\mathbb{R}$ et surtout sur $]0,+\infty[$.

♠ *On étudie la continuité de la fonction sur $]-\infty,0[$:*

La fonction $u: x\longmapsto \sin x$ est continue sur $]-\infty,0[$ et comme la fonction $v: x\longmapsto x$ est continue et ne s'annule pas sur $]-\infty,0[$ donc la fonction $f=\dfrac{u}{v}$ est continue sur $]-\infty,0[$.

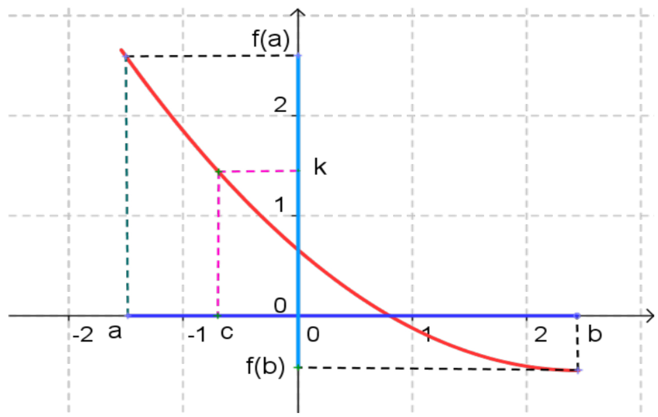
Donc la fonction f est continue sur $\mathbb{R}$.

Théorème des valeurs intermédiaire (T.V.I)

Théorème 6 .

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction continue sur un intervalle* I.

Si a *et* b *sont deux points de* I $(a < b)$ *tels que :* $f(a).f(b) \leq 0$*. Alors il existe* $c \in [a, b]$ *tel que* $f(c) = 0$.



Exemple 7 *Montrer que l'équation* $x^3+x+1 = 0$*, admet une unique racine dans l'intervalle* $]-1, 0[$.

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x) = x^3 + x + 1$

La fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$ *car c'est une fonction polynôme, et en particulier elle est continue sur* $[-1, 0]$. (1)

Exercice 8 *Et on a :* $f'(x) = 3x^2+1$ *donc* $(\forall x \in [-1, 0])$, $f'(x) > 0$*, d'où* f *est strictement croissante sur* $[-1, 0]$. (2)

On a: $f(-1) = -1$ *et* $f(0) = 1$ *donc* $f(-1) \times f(0) < 0$. (3)

D'après (1), (2) *et* (3) *on en déduit que l'équation* $x^3 + x + 1 = 0$ *admet une solution unique dans l'intervalle* $]-1, 0[$.

Théorème de la bijection

Théorème 9 .

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *une fonction :*

1. *continue sur* I,
2. *strictement monotone sur* I.

   On a alors :

   - ♣ $f(I)$ *est un intervalle,*
   - ♣ $f : I \longrightarrow f(I)$ *est une application bijective,*
   - ♣ $f^{-1} : f(I) \longrightarrow I$ *est continue et strictement monotone sur* $f(I)$*. Plus précisément,* f^{-1} *possède le même sens de monotonie que* f.

Exemple 10 .

Montrer que l'équation $x^3+2x+1=0$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$.

On considère la fonction f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=x^3+2x+1$.

On a $f'(x)=3x^2+2$, *donc* $(\forall x\in\mathbb{R})\,,\ f'(x)>0$. *D'où la fonction* f *est strictement croissante sur* $\mathbb{R}$.

La fonction f *est continue sur* $\mathbb{R}$, *elle réalise donc une bijection de* $\mathbb{R}$ *sur* $f(\mathbb{R})$. *Or*

$$f(\mathbb{R})=f(]-\infty,+\infty[)=\left]\lim_{x\longrightarrow-\infty}f(x)\,,\lim_{x\longrightarrow+\infty}f(x)\right[=]-\infty,+\infty[=\mathbb{R}$$

Comme $0\in\mathbb{R}$, *l'équation* $f(x)=0$ *admet une unique solution* $\alpha\in\mathbb{R}$.

Par suite l'équation $x^3+2x+1=0$ *admet une unique solution dans* $\mathbb{R}$.

Remarque 11 .

♣ $(C_{f^{-1}})$ *et* (C_f) *sont symétriques par rapport à* $(\Delta):y=x$.

♣ *On a*

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ \\ x\in f(I) \end{cases} \iff \begin{cases} x=f(y) \\ \\ y\in I \end{cases}$$

Exemple 12 .

Soit f *la fonction numérique définie sur* $I=\left[\frac{1}{2},+\infty\right[$ *par :* $f(x)=x+\sqrt{2x+1}$

f *réalise une bijection de* I *sur* I. *Soit* f^{-1} *sa fonction réciproque.*

Déterminer f^{-1}.

On a

$$\begin{cases} y=f^{-1}(x) \\ \\ x\geq\dfrac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} x=f(y) \\ \\ y\geq\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $x\in I$ *et* $y\in I$, *on a*

$$\begin{array}{rcl} y & = & f^{-1}(x) \\ & \iff & f(y)=x \\ & \iff & y+\sqrt{2y-1}=x \\ & \iff & 2y+2\sqrt{2y-1}=2x \\ & \iff & \left(\sqrt{2y-1}\right)^2+2\sqrt{2y-1}+1=2x \\ & \iff & \left(\sqrt{2y-1}+1\right)^2=2x \\ & \iff & \sqrt{2y-1}+1=\sqrt{2x} \\ & \iff & \sqrt{2y-1}=\sqrt{2x}-1 \\ & \iff & y=\dfrac{\left(\sqrt{2x}-1\right)^2+1}{2} \end{array}$$

donc

$$\left(\forall x\in\left[\frac{1}{2},+\infty\right[\right),\ f^{-1}(x)=\frac{\left(\sqrt{2x}-1\right)^2+1}{2}$$

La continuité de la composée de deux fonctions

Théorème 13 .

Si f est continue sur un intervalle I et g est continue sur un intervalle J tel que $f(I) \subset J$ alors la fonction $g \circ f$ est continue sur l'intervalle I.

Exemple 14 .

Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = \sqrt{\dfrac{x}{1+\sin^2 x}}$.

Étudions la continuité de f sur $\mathbb{R}^+$.

La fonction $u : x \longmapsto \dfrac{x}{1+\sin^2 x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$ et $u(\mathbb{R}^+) \subset \mathbb{R}^+$ et la fonction $v : x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$. Donc la fonction $f = v \circ u$ est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Fonction Racine n^{ième}

Propriété 15 .

Soit f une fonction positive sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

1. *Si f est continue sur I alors la fonction $\sqrt[n]{f}$ est continue sur I.*
2. *Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = \ell \geq 0$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.*
3. *Si $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} f(x) = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.*

Exemple 16 .

On considère la fonction numérique f définie sur $I = [0, 1]$ par : $f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 3x$.

Etudier la continuité de la fonction f sur $[0, 1]$.

La fonction $v : x \longmapsto 1 + x$ est continue et positive sur $[0, 1]$ alors la fonction $w : x \longmapsto \sqrt[3]{v(x)}$ est continue sur $[0, 1]$, et la fonction $u : x \longrightarrow -3x$ est continue sur $[0, 1]$. Donc la fonction $f = w + u$ est continue sur $[0, 1]$.

Dérivabilité

Dérivabilité d'une fonction en un point

Définition 17 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

On dit que f est dérivable en x_0 s'il existe un réel ℓ tel que : $\lim\limits_{x \longrightarrow x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell$. Le nombre ℓ est appelée le nombre dérivée de la fonction f en x_0. Il est noté $f'(x_0)$.

Tangente à la courbe d'une fonction en un point

Soit f une fonction dérivable en un point x_0.

Une équation de la tangente (T) à la courbe de la fonction f au point $M(x_0, f(x_0))$ est :

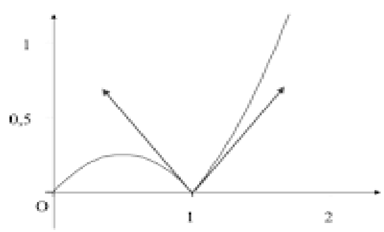
$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

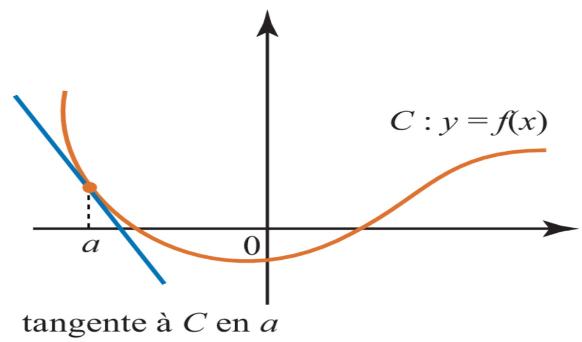
Remarque 18 .

Il arrive parfois que la fonction f possède une dérivée à gauche et à droite en x_0 sans pour autant être dérivable en x_0. Plus précisément, c'est le cas lorsque $f'_g(x_0) \neq f'_d(x_0)$. On introduit alors les notions suivantes :

♣ *La demi-tangente à gauche de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f'_g(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*

♣ *La demi-tangente à droite de f en x_0 est la droite d'équation : $y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.*





Propriété 19 .

Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et $x_0 \in I$.

$$f \text{ est dérivable en } x_0 \iff \begin{cases} f \text{ est dérivable à droite et à gauche en } x_0 \\ f'_d(x_0) = f'_g(x_0) \end{cases}$$

Fonction dérivées des fonctions usuelles

Fonction	Ensemble de définiton de f	Fonction dérivée f'	Ensemble de définiton de f'
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0, +\infty[$	$f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0, +\infty[$
$f(x) = \dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = \dfrac{-1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$

Opérations sur les fonctions dérivables

♣ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, alors les fonctions $(f+g)$, $(f-g)$, $(f\times g)$ et f^n sont dérivables sur I.

♣ Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I, et $g\neq 0$ sur I alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est dérivable sur I, et on a le tableau suivant

La somme	$f+g$ est dérivable sur I	$(f+g)' = f'+g'$
La soustraction	$f-g$ est dérivable sur I	$(f-g)' = f'-g'$
Produit	$f\times g$ est dérivable sur I	$(f\times g)' = f'\times g+f\times g'$
Puissance	f^n est dérivable sur I	$(f^n)' = nf'\times f^{n-1}$
Inverse	Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{1}{g}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{1}{g}\right)' = -\dfrac{g'}{g^2}$
Quotient	Si g ne s'annule pas sur I alors $\frac{f}{g}$ est dérivable sur I	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'\times g-f\times g'}{g^2}$

Corollaire

♣ Toute fonction polynôme est dérivable sur $\mathbb{R}$.

♣ Toute fraction rationnelle est dérivable sur son ensemble de définition.

Dérivation d'une fonction composée

Théorème 20 .

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I, et v une fonction dérivable sur un intervalle J tel que $u(I)\subset J$. Alors, la fonction composée $v\circ u$ est dérivable sur I, et on a

$$(\forall x\in I),\ (v\circ u)' = u'(x)\times v'(u(x)).$$

Corollaire 21 .

♣ *Soit u une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors si u est strictement positive sur I alors $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et sa dérivée est :*

$$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$$

Méthode 22 *Pour montrer qu'une fonction est dérivable sur un intervalle I.*

♣ *S'il n' y a pas de " point à problème", on justifie la dérivabilité en utilisant les opérations sur les fonctions dérivables.*

♣ *S'il y a un "point à problème" :*

- ♠ *on justifie la dérivabilité en dehors du point à problème à l'aide des opérations usuelles.*
- ♠ *on justifie la dérivabilité au point à problème avec la définition, en calculant la limite du taux d'accroissement.*

Dérivée de la fonction réciproque

Propriété 23 .

Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I de $\mathbb{R}$.

Soit $x_0 \in I$ et $y_0 = f(x_0)$. On suppose que f est dérivable en x_0 avec $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en y_0 et on a

$$\left(f^{-1}\right)'(y_0) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(y_0)\right)}.$$

Remarque 24 .

- ♣ *Si $f'(x_0) = 0$,alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0 et sa courbe représentative possède une tangente verticale en y_0.*
- ♣ *Si f est dérivable sur I et si pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$ alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$.*

Dérivée de la fonction racine n^{ème}

Propriété 25 .

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

Si u est une fonction dérivable et strictement positive sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ alors la fonction $x \longmapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est dérivable sur I et sa fonction dérivée est donnée par :

$$\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)' = \frac{u'(x)}{n\left(\sqrt[n]{u(x)}\right)^{n-1}}$$

Étude des fonctions numériques

Monotonie d'une fonction numérique

Propriété 26 .

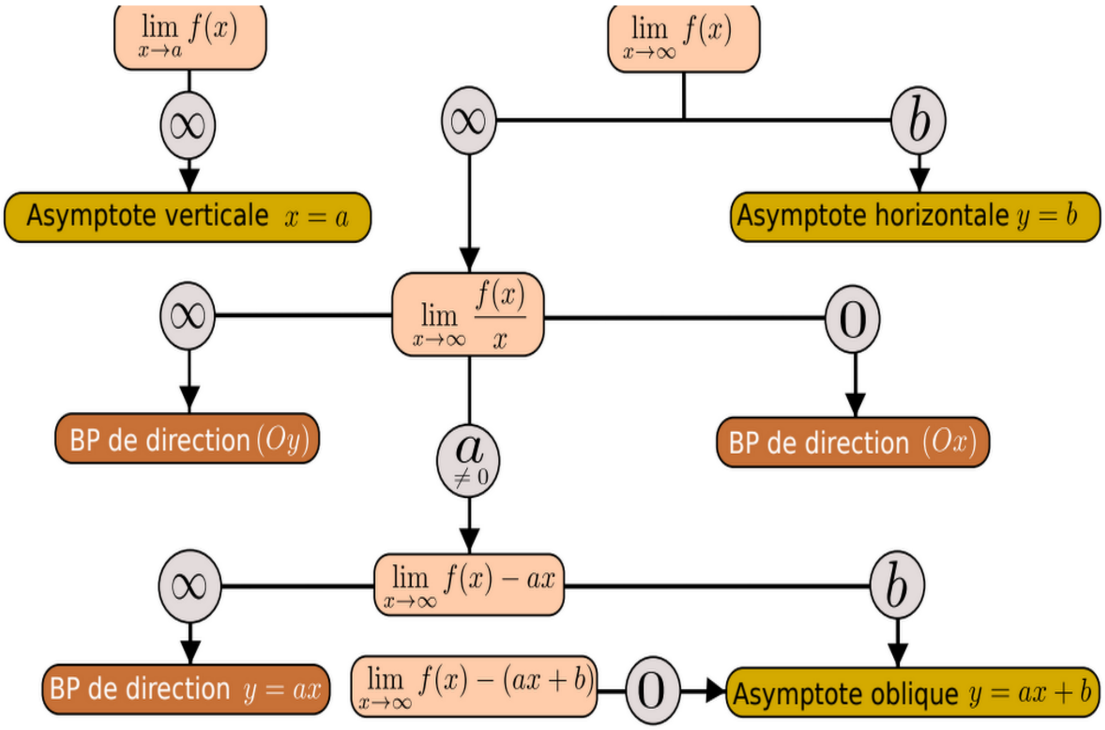
Soit f une fonction dérivable sur I.

- ♣ *f est croissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) \geq 0$.*
- ♣ *f est décroissante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) \leq 0$.*
- ♣ *f est constante sur I si et seulement si $(\forall x \in I)$, $f'(x) = 0$.*

Remarque 27 .

- ♣ *Si $f' \geq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement croissante sur I.*
- ♣ *Si $f' \leq 0$ sur I et f' ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors f est strictement décroissante sur I.*

Étude des branches infinies



Axe de symétrie– Centre de symétrie

Propriété 28 *Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthogonal.*

Pour que la droite (Δ) d'équation $x=a$ soit un axe de symétrie de la courbe (C_f), il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a-x) \in D_f \qquad \text{et} \qquad f(2a-x) = f(x)$$

Propriété 29 *Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative dans un repère donné.*

Pour que le point $\Omega(a,b)$ soit un centre de symétrie de la courbe (C_f), il faut et il suffit que pour tout $x \in D_f$:

$$(2a-x) \in D_f \qquad \text{et} \qquad f(2a-x) = 2b - f(x)$$

Remarque 30 .

♣ Si *f est une fonction paire alors sa courbe (C_f) admet l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.*

♣ Si *f est une fonction impaire alors sa courbe (C_f) admet l'origine du repère comme centre de symétrie.*

♣ *Si la courbe (C_f) admet la droite d'équation $x=a$ comme axe de symétrie ou admet le point de coordonnées (a,b) comme centre de symétrie alors on peut réstriendre l'étude de la fonction f sur l'ensemble $D_{etude} = D_f \cap [a,+\infty[$.*

Les fonctions périodiques

Définition 31 *Soit $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $T \in]0, +\infty[$. On dit que T est une période pour f si :*

$$\forall x \in D_f, \quad (x+T) \in D_f \quad \text{et} \quad f(x+T) = f(x)$$

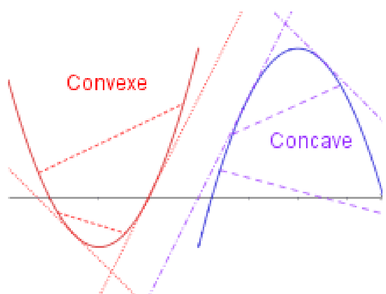
Étude de la concavité d'une courbe

Dérivée seconde

Définition 32 *Soit une fonction f deux fois dérivable sur I. On appelle dérivée seconde de f, notée f'', la fonction dérivée de f' : $(f')' = f''$.*

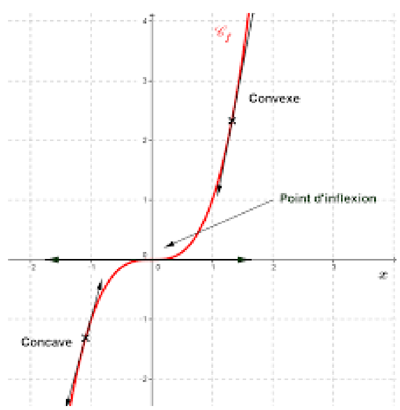
Propriété 33 *Soit f une fonction deux fois dérivable sur I.*

- *f est **convexe** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \geq 0$.*
- *f est **concave** sur I si, et seulement si, pour tout $x \in I$, $f''(x) \leq 0$.*



Point d'inflexion

Définition 34 *Soit f une fonction et (C_f) sa courbe représentative. Un point d'inflexion de la courbe (C_f) est un point où la courbe (C_f) traverse sa tangente en ce point. C'est aussi le point où la convexité change de sens.*



Théorème 35 .

Soit f une fonction deux fois dérivable sur I de courbe représentative (C_f).
Soit $A(a, f(a))$ un point de (C_f) de tangente (T_a).
Si $f''(a) = 0$ en changeant de signe alors (C_f) admet un point d'inflexion en A.

Les Fonctions Primitives

Primitive d'une fonction sur un intervalle

Définition 36 .
f est une fonction définie sur un intervalle I. On dit que f admet une fonction primitive sur I si, et seulement si il existe une fonction F dérivable sur I tel que :

$$\forall x \in I, \quad F'(x) = f(x)$$

Théorème 37 .
Soit une fonction f admettant une primitive F sur I alors toute primitive G de f est de la forme

$$\forall x \in I, \quad G(x) = F(x) + k \ , \ (k \in \mathbb{R})$$

Primitive vérifiant une condition initiale

Théorème 38 *Soit f une fonction admettant une primitive sur I. Soit $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$. Il existe une unique primitive F de f sur I tel que :*

$$F(x_0) = y_0$$

Propriétés

Propriété 39 1.
Toute fonction continue sur un intervalle I admet une primitive définie sur cet intervalle.

Propriété 40 2.

1. *Soient F et G deux fonctions primitives de f et g sur I. Alors $F+G$ est une primitive de $f+g$ sur I.*
2. *αF est une fonction primitive de αf sur I avec $\alpha \in \mathbb{R}$.*

Tableau des primitives usuelles

Fonction f	F primitives de f	Intervalle
$f(x) = 0$	$F(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2}x^2 + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$; $(n \in \mathbb{N}^*)$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* \backslash \{-1\})$	$F(x) = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$	$\mathbb{R}_+^*$
$f(x) = \sin x$	$F(x) = -\cos x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$F(x) = \sin x + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax+b)$; $(a \neq 0)$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \sin(ax+b)$; $(a \neq 0)$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b) + k$	$\mathbb{R}$
$f(x) = 1 + \tan^2 x$	$F(x) = \tan x + k$	$\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \ ; \ k \in \mathbb{Z}\right\}$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = \frac{-1}{x} + k$	$\mathbb{R}^*$

Soient f et g deux fonctions dérivables sur l'intervalle I.

$Fonction$	Prmitives
$f' + g'$	$(F+G) + k$
$f' \times g + f \times g'$	$(F \times G) + k$
$\frac{-g}{g^2}$; $(g\ est\ non\ nul)$	$\frac{1}{g} + k$
$\frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$; $(g\ est\ non\ nul)$	$\frac{f}{g} + k$
$f' \times f^n$, $(n \in \mathbb{N}^*)$	$\frac{1}{n+1}f^{\,n+1} + k$
$f' \times f^r$; $(r \in \mathbb{Q}^* \backslash \{-1\})$ et $f > 0$	$\frac{1}{r+1}f^{\,r+1} + k$
$\frac{f'}{\sqrt{f}}$; $f \succ 0$	$2\sqrt{f} + k$

Les suites Numériques

Suite majorée - Suite minorée - Suite bornée

Définition 41 .

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est majorée s'il existe un réel* M *tel que :* $(\forall n \in I)$, $u_n \leq M$

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est minorée s'il existe un réel* m *tel que :* $(\forall n \in I)$, $u_n \geq m$

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n \geq n_0}$ *est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.*

Monotonie d'une suite numérique

Définition 42 .

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante si* : $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} - u_n \geq 0$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante si* : $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} - u_n \leq 0$.

♣ *On dit que la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est constante si* : $(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} = u_n$.

Remarque 43 .

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est croissante alors* : $(\forall n \in I)\,,\ u_n \geq u_{n_0}$

♣ *Si la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est décroissante alors* : $(\forall n \in I)\,,\ u_n \leq u_{n_0}$.

Suite Arithmétique

Définition 44 .

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est arithmétique s'il existe un réel* r *tel que*

$$(\forall n \in I)\,,\quad u_{n+1} = u_n + r$$

Le nombre r *est appelé la raison de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 45 .

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite arithmétique de raison* r *alors pour tout* $(n,p) \in I^2$:

$$u_n = u_p + (n-p)\,r \qquad et \qquad u_p + u_{p+1} + ... + u_n = \frac{(n-p+1)}{2}\,(u_p + u_n)$$

Suite Géométrique

Définition 46 .

On dit que la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est géométrique s'il existe un réel* q *tel que* :

$$(\forall n \in I)\,,\ u_{n+1} = q u_n$$

Le nombre r *est appelé la raison de la suite* $(u_n)_{n\geq n_0}$.

Propriété 47 .

Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ *est une suite géométrique de raison* $q \in \mathbb{R}^* \setminus \{1\}$ *alors pour tout* $(n,p) \in I^2$:

$$u_n = u_p \times q^{n-p} \qquad et \quad u_p + u_{p+1} + ... + u_n = u_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1-q} \qquad (n \geq p)$$

Limite d'une suite numérique

Soit ℓ un réel.

1. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \iff (\forall \epsilon > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,(\forall n \in \mathbb{N})\ \ (n \geq N \Longrightarrow |u_n - \ell| < \epsilon)$

2. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty \iff (\forall A > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,,\,(\forall n \geq N) \quad u_n > A$

3. $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty \iff \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} (-u_n) = +\infty \iff (\forall A > 0)\,(\exists N \in \mathbb{N})\,,\,(\forall n \geq N)$ $u_n < -A$

4. On dit qu'une suite numérique est convergente si $\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n\right) \in \mathbb{R}$. Dans le cas contraire on dit qu'elle divergente.

Résultats 48 .

♣ *Toute suite convergente est bornée.* $\left(CV \Longrightarrow BORN\acute{E}E\right)$

♣ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \iff \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |u_n - \ell| = 0.$

♣ $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = 0 \iff \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} |u_n| = 0.$

Critères de convergence 49 .

♣ $\left.\begin{array}{c} \forall n \geq n_0, \quad |u_n - \ell| \leq x_n \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} x_n = 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell.$

♣ $\left.\begin{array}{c} \forall n \geq n_0, \quad a_n \leq u_n \leq b_n \\ \\ \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = \ell \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell.$

♣ $\left((\forall n \geq n_0)\,, \quad a_n \leq u_n \quad et \quad \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} a_n = +\infty\right) \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = +\infty$

♣ $\left((\forall n \geq n_0)\,, \quad u_n \leq b_n \quad et \quad \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} b_n = -\infty\right) \Longrightarrow \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = -\infty.$

Résultats 50 .

$$\left(\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \quad et\ \ell > 0\right) \Longrightarrow ((\exists N \in \mathbb{N})\,, \quad (\forall n \geq N) \quad u_n > 0)\,.$$

Limite d'une suite géométrique

Soit q un réel non nul.

♣ Si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = +\infty$

♣ Si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} q^n = 0$

♣ Si $q \leq -1$ alors la suite $(q^n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet pas de limite.

Monotonie et convergence

1. Toute suite croissante majorée est convergente.
2. Toute suite décroissante minorée est convergente.
3. Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$
4. Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$

Limite et Ordre

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ et $(v_n)_{n\geq n_0}$ deux suites numériques convergentes Alors :

♣ Si la suite $(u_n)_{n\geq n_0}$ est positive alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \geq 0$.

♣ Si $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq n_0$ alors $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n \leq \lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} v_n$.

Suite de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$.

Soit f une fonction numérique définie sur un intervalle I. $(u_n)_{n\geq n_0}$ est une suite réelle définie par $u_{n_0} \in I$ et $(\forall n \geq n_0)$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

$$\left.\begin{array}{c}\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} u_n = \ell \text{ et } \ell \in I \\ \\ f(I) \subset I \\ \\ f \text{ est continue sur } I\end{array}\right\} \Longrightarrow \ell = f(\ell)$$

Fonction Logarithme népérien

Définition de la fonction ln

Définition 51 .

La primitive de la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ *sur* $]0,+\infty[$ *et qui s'annule en* 1 *est appelée la fonction logarithme népérien et on la note* $\ln$.

Remarque 52 .

♣ *L'ensemble de définition de la fonction* $\ln$ *est* $]0,+\infty[$ *et* $\ln(1) = 0$.

♣ *La fonction* $\ln$ *est dérivable sur* $]0,+\infty[$ *et de plus* : $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $\ln'(x) = \dfrac{1}{x}$.

♣ *La fonction* $\ln$ *est strictement croissante sur* $]0,+\infty[$.

Propriétés algébriques

Soit x et y deux éléments de $]0,+\infty[$ et $r \in \mathbb{Q}$ on a

1. $\ln(x \times y) = \ln(x) + \ln(y)$
2. $\ln\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ln(x) - \ln(y)$
3. $\ln\left(\dfrac{1}{y}\right) = -\ln(y)$
4. $\ln(x^r) = r\ln(x)$
5. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\ln(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{1}{n}\ln x$
6. $\ln(\sqrt{x}) = \dfrac{1}{2}\ln x$
7. $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall(x_1; x_2; ...; x_n) \in (]0,+\infty[)^n)$, $\quad \ln\left(\prod_{k=1}^{n} x_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \ln(x_k)$.

Limites

1. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \ln x = +\infty$
2. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \ln x = -\infty$
3. $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$
4. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x\ln x = 0$
5. $\lim\limits_{x \longrightarrow 1} \dfrac{\ln x}{x-1} = 1$
6. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} x^r \ln x = 0$ et $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} \dfrac{\ln x}{x^r} = 0$ pour tout $r \in \mathbb{Q}_+^*$.

Le nombre e la base de la logarithme népérien

Le nombre e est l'unique solution de l'équation $\ln x = 1$. On a $e = 2,718281828...$

Dérivée Logarithmique

Propriété 53 .

Si u est une fonction strictement positive sur un intervalle I et si u est dérivable sur I. Alors la fonction $x \longmapsto \ln(u(x))$ est dérivable sur I, et on a

$$(\forall x \in I), \ (\ln(u(x)))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Remarque 54 .

Les fonctions primitives de la fonction $x \longmapsto \dfrac{u'(x)}{u(x)}$ sont $x \longmapsto \ln|u(x)| + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Fonction Exponentielle

Définition et propriétés

Définition 55 .

La fonction réciproque de la fonction logarithme népérienne est appelée la fonction exponentielle népérienne (ou la fonction exponentielle), et on le note $\exp$.

Remarque 56 .

On a $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in]0, +\infty[), (y = \exp(x) \iff x = \ln y)$.

On écrit $\exp(x) = e^x$.

Propriétés

Soit x et y deux réels et $r \in \mathbb{Q}$.

1. $e^{x+y} = e^x \times e^y$
2. $e^{x-y} = \dfrac{e^x}{e^y}$
3. $e^{-x} = \dfrac{1}{e^x}$
4. $(e^x)^r = e^{r.x}$
5. $(\forall n \in \mathbb{N}^*), \ \sqrt[n]{e^x} = e^{\frac{x}{n}}$.

Monotonie de la fonction

La fonction $\exp : x \longmapsto e^x$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$

$$\left(\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2\right), \quad x < t \iff e^x < e^t$$

Limite

1. $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} e^x = 0$

2. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} e^x = +\infty$

3. $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{e^x}{x} = +\infty$

4. $(\forall n \in \mathbb{N}), \begin{cases} \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty \\ \\ \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} x^n e^x = 0 \end{cases}$

5. $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1.$

Dérivée de la fonction exponentielle

1. La fonction exp est dérivable sur $\mathbb{R}$, et on a $(\forall x \in \mathbb{R}), (e^x)' = e^x$.

2. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction $e^u : x \longmapsto e^{u(x)}$ est dérivable sur I, et on a $(e^u)' = u'e^u$. $\big($c'est-à-dire $(\forall x \in I), \ (e^u)'(x) = u'(x) \times e^{u(x)}\big)$.

3. Si u est dérivable sur I alors les fonctions primitives sur I de la fonction $x \longmapsto u'(x)\, e^{u(x)}$ sont les fonctions $x \longmapsto e^{u(x)} + k \quad (k \in \mathbb{R})$.

Calculs d'integrales

Intégrale d'une fonction continue

Définition 57 .

Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue sur un intervalle I et F une primitive quelconque de f sur I, alors pour tout couple $(a, b) \in I^2$:

$$\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Ce nombre est appelé l'intégrale de a à b de f.

Propriétés du calcul intégral

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle I et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $(a, b, c) \in I^3$:

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\, dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$

3. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

4. $\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$

5. $\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$

Intégrale et ordre

1. $(a \leq b \text{ et } f \geq 0) \implies \int_a^b f(x)\,dx \geq 0$

2. $(a \leq b \text{ et } f \leq 0) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq 0$

3. $(a \leq b \text{ et } f \leq g) \implies \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$

4. $a \leq b \implies \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction

Si pour tout $x \in [a,b]$, on a $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$. Le nombre réel $\dfrac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$ est la valeur moyenne de f sur $[a,b]$.

Intégration par parties

Soit u et v deux fonctions dérivables $[a,b]$ telles que u' et v' sont continues sur $[a,b]$. Alors

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx = [u(x)\times v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\times v(x)\,dx$$

Aires et volumes

Soit f une fonction continue sur $[a,b]$ et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé.

♣ L'aire du domiane délimité par le courbe (C_f) , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x=a$ et $x=b$ est égale à :

$$A = \int_a^b |f(x)|\,dx \quad (ua)$$

♣ Le volume du solide engendré par la rotation de la courbe (C_f) autour de l'axe des abscisses un tour complet est :

$$V = \pi\int_a^b (f(x))^2\,dx \quad (uv)$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com