Correction de la série d'exercices N1 sur les fonctions numériques

Exercice 1 .

On cherche l'ensemble de définition de la fonction f dans chacun des cas :

♣ $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}-4}{x-1}$.

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} /\ x \geq 0 \ \text{et}\ x-1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} /\ x \geq 0 \ \text{et}\ x \neq 1\} \\ &= [0,1[\cup]1,+\infty[\end{aligned}$$

donc $D_f = [0,1[\cup]1,+\infty[$.

♣ $f(x) = \dfrac{x^2-x+3}{x^2+x+3}$

On a

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} /\ x^2+x+3 \neq 0\right\}$$

Comme le discriminant Δ *du trinôme* x^2+x+3 *est* $-11 < 0$. *Donc* $x^2+x+3 \neq 0$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}$. *D'où*

$$D_f = \mathbb{R}$$

♣ $f(x) = \sqrt{6x^2-x-1}$

On a

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} /\ 6x^2-x-1 \geq 0\right\}$$

Comme $\Delta = 25$ *donc le trinôme* $6x^2-x-1$ *admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 :

$$x_1 = \frac{1-\sqrt{25}}{12} = -\frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1+\sqrt{25}}{12} = \frac{1}{2}$$

donc

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$6x2-x-1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d'où $D_f = \left]-\infty, -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.

♣ $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}+5}{\sqrt{x+3}}$.

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq 0\ \ et\ x+3>0\}\\ &= \{x\in\mathbb{R}\ /\ x\geq 0\ \ et\ x>-3\}\\ &= [0,+\infty[\end{aligned}$$

donc $D_f=[0,+\infty[$.

♣ $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-1}{2x-1}}$.

On a

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{x\in\mathbb{R}\ /\ 2x-1\neq 0\ \ et\ \frac{x^2-1}{2x-1}\geq 0\right\}\\ &= \left\{x\in\mathbb{R}\ /\ x\neq \frac{1}{2}\ \ et\ \frac{x^2-1}{2x-1}\geq 0\right\} \end{aligned}$$

Comme

♠ $x^2-1=0 \iff x=1\ \ ou\ x=-1$

♣ $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$

donc

x	$-\infty$		-1		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
x^2-1		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$2x-1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x^2-1}{2x-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

d'où

$$D_f=\left[-1,\frac{1}{2}\right[\cup[1,+\infty[$$

♣ $f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sqrt{x^2+1}}$

On a

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x^2+1\geq 0\ \ et\ 1+\sqrt{x^2+1}\neq 0\right\}$$

On a

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\ \ x^2+1>0\ \ et\ 1+\sqrt{x^2+1}\neq 0$$

donc

$$D_f = \mathbb{R}$$

♣ $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2x-1}{x+2} \quad , \quad si\ x \leq 0 \\ \\ f(x) = \dfrac{3}{x^2-1} \quad , \quad si\ x > 0 \end{cases}$

On pose $f_1(x) = \dfrac{2x-1}{x+2}$, $I =]-\infty, 0]$ *et* $f_2(x) = \dfrac{3}{x^2-1}$, $J =]0, +\infty[$. *Donc*

$$D_f = (D_{f_1} \cap I) \cup (D_{f_2} \cap J)$$

On a $D_{f_1} = \{x \in \mathbb{R} / \ x+2 \neq 0\} =]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$ *donc* $D_{f_1} \cap I =]-\infty, -2[\cup]-2, 0]$. *D'autre part, on a*

$D_{f_2} = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 1 \ et \ x \neq -1\} =]-\infty, -1[\cup]-1, 1[\cup]1, +\infty[$ *donc* $D_{f_é} \cap J =]0, 1[\cup]1, +\infty[$. *D'où*

$$D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 1[\cup]1, +\infty[$$

Exercice 2 .

On étudie la parité de la fonction f :

♣ *On considère la fonction suivante :* $f(x) = |x-5| + |x+5|$.

On a $D_f = \mathbb{R}$. *Pour tout* $x \in D_f$, *on a* $-x \in D_f$.

Soit $x \in D_f$.

On a

$$f(-x) = |-x-5| + |-x+5| = |-(x+5)| + |-(x-5)| = |x-5| + |x+5| = f(x) .$$

Donc la fonction f *est paire.*

♣ *On considère la fonction suivante :* $f(x) = \dfrac{\tan x}{|x|+4}$.

On a $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \dfrac{\pi}{2} + k\pi \ / \ k \in \mathbb{Z} \right\}$. *Pour tout* $x \in D_f$, *on a* $-x \in D_f$.

Soit $x \in D_f$.

On a $f(-x) = \dfrac{\tan(-x)}{|-x|+4} = -\dfrac{\tan x}{|x|+4} = -f(x)$.

Donc la fonction f *est impaire.*

♣ *On considère la fonction suivante :* $f(x) = \sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x}$.

On a $D_f = \{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - x \geq 0 \ et \ x^2 + x \geq 0\}$. *Comme*

$$x^2 - x \geq 0 \iff]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[\quad et \quad x^2 + x \geq 0 \iff]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[$$

donc

$$\begin{aligned} D_f &= (]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) \cap (]-\infty, 0] \cup [1, +\infty[) \\ &= ((]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) \cap]-\infty, 0]) \cup ((]-\infty, -1] \cup [0, +\infty[) \cap [1, +\infty[) \\ &=]-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty[\\ &= \{0\} \cup]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[\end{aligned}$$

Pour tout $x \in D_f$, *on a* $-x \in D_f$.

Soit $x \in D_f$, *on a*

$$\begin{aligned} f(-x) &= \sqrt{(-x)^2 - (-x)} - \sqrt{(-x)^2 + (-x)} \\ &= \sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 - x} \\ &= -\left(\sqrt{x^2 - x} - \sqrt{x^2 + x}\right) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

donc la fonction f *est impaire.*

Exercice 3 .

On considère la fonction numérique f *définie par :* $\begin{cases} f(x) = 2x - 3 \ , \ si \ x \in]-\infty, -2[\\ f(x) = x^3 - 2x \ , \ si \ x \in [-2, 2] \\ f(x) = 2x + 3 \ , \ si \ x \in]2, +\infty[\end{cases}$

1. *On cherche* D_f :

   On pose $f_1(x) = 2x - 3$, $f_2(x) = x^3 - 2x$ *et* $f_3(x) = 2x + 3$. *On a* $D_{f_1} = D_{f_2} = D_{f_3} = \mathbb{R}$.

   Donc

$$\begin{aligned} D_f &= (D_{f_1} \cap]-\infty, -2[) \cup (D_{f_2} \cap [-2, 2]) \cup (D_{f_3} \cap]2, +\infty[) \\ &=]-\infty, -2[\cup [-2, 2] \cup]2, +\infty[\\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. *Montrons que la fonction* f *est impaire.*

   Pour tout $x \in D_f$, *on a* $-x \in D_f$.

   ♣ Si $x \in]-\infty, -2[$ *alors* $-x \in]2, +\infty[$

   on a

$$f(-x) = -2x + 3 = -(2x - 3) = -f(x)$$

♣ Si $x \in]2,+\infty[$ *alors* $-x \in]-\infty,-2[$

on a

$$f(-x) = -2x - 3 = -(2x+3) = -f(x)$$

♣ Si $x \in [-2,2]$ *alors* $-x \in [-2,2]$

on a

$$f(-x) = (-x)^3 - 2(-x) = -x^3 + 2x = -\left(x^3 - 2x\right) = -f(x)$$

On résumé que la fonction f est impaire.

Exercice 4 .

On considère le tableau de variations de la fonction f définie ci-dessous

x	-3		-1		1		3		5
f	1	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\searrow$	-4	$\nearrow$	-2

1. *La fonction f est définie sur $[-3,5]$. C'est-à-dire $D_f = [-3,5]$.*
2. *L'image de 1 par la fonction f est 0. L'antécédente de 1 par f est -3.*
3. ♣ *2 est une valeur maximale (globale) de la fonction f en point d'abscisse -1 sur D_f.*

   ♣ *-4 comme valeur minimale (globale) de la fonction f en point d'abscisse 3 sur D_f.*
4. *On a $f([-3,-1]) = [1,2]$ et $f([-1,3]) = [-4,2]$.*
5. *Le tableau de signe de la fonction f sur D_f :*

x	-3		1		5
$f(x)$		$+$	0	$-$	

Exercice 5 .

f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+4}$

1. *Montrons que la fonction f est impaire.*

   On a $D_f = \mathbb{R}$.

   ♣ *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.*

   ♣ *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+4} = \dfrac{-x}{x^2+4} = -\left(\dfrac{x}{x^2+4}\right) = -f(x)$.*

On conclut que la fonction f est impaire.

2. **a)** *Soit a et b deux éléments distincts de D_f, montrons que :* $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}=\dfrac{-ab+4}{(a^2+4)(b^2+4)}$.

   On a

$$\begin{aligned}\frac{f(a)-f(b)}{a-b} &= \frac{\dfrac{a}{a^2+4}-\dfrac{b}{b^2+4}}{a-b}\\ &= \frac{\dfrac{a(b^2+4)-b(a^2+4)}{(a^2+4)(b^2+4)}}{a-b}\\ &= \frac{a(b^2+4)-b(a^2+4)}{(a-b)(a^2+4)(b^2+4)}\\ &= \frac{ab^2+4a-ba^2-4b}{(a-b)(a^2+4)(b^2+4)}\\ &= \frac{-ab(a-b)+4(a-b)}{(a-b)(a^2+4)(b^2+4)}\\ &= \frac{(a-b)(-ab+4)}{(a-b)(a^2+4)(b^2+4)}\\ &= \frac{-ab+4}{(a^2+4)(b^2+4)}\end{aligned}$$

   donc

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}=\frac{-ab+4}{(a^2+4)(b^2+4)}\quad \text{où}\ \ a,b\in\mathbb{R}\ \text{ et } a\neq b$$

   b) *La monotonie de la fonction f sur $[0,2]$ et $[2,+\infty[$:*

   ♣ *Soit a et b deux éléments de $[0,2]$, tels que $a\neq b$.*
   On a $0\leq a\leq 2$ et $0\leq b\leq 2$ alors $0\leq ab\leq 4$ et comme $a\neq b$ donc $0\leq ab<4$ d'où $0<4-ab\leq 4$. Comme $(a^2+4)(b^2+4)>0$. Donc

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}>0\quad \text{où}\ \ a,b\in[0,2]\ \text{ et } a\neq b$$

   Ceci signifie que f est strictement croissante sur $[0,2]$.

   ♣ *Soit a et b deux éléments de $[2,+\infty[$, tels que $a\neq b$.*
   On a $a\geq 2$ et $b\geq 2$ alors $ab\geq 4$ et comme $a\neq b$ donc $ab>4$ d'où $4-ab<0$. Comme $(a^2+4)(b^2+4)>0$. Donc

$$\frac{f(a)-f(b)}{a-b}<0\quad \text{où}\ \ a,b\in[2,+\infty[\ \text{ et } a\neq b$$

   Ceci signifie que f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$.

   c) *La fonction f est strictement croissante sur $[0,2]$ et puisque elle est impaire alors f est strictement croissante sur $[-2,0]$. D'autre part, f est strictement décroissante sur $[2,+\infty[$ et puisque elle est impaire alors f est strictement décroissante sur $]-\infty,-2]$.*

3. *Le tableau de variations de la fonction f*

x	$-\infty$		-2		0		2		$+\infty$
f		↘	$\frac{-1}{4}$	↗	0	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

4. *On cherche les extremums de f .*

   ♣ $\dfrac{1}{4}$ *est un maximum local de la fonction f en 2 sur l'intervalle* $]1, 3[$.

   ♣ $-\dfrac{1}{4}$ *est un minumum local de la fonction f en -2 sur l'intervalle* $]-3, -1[$.

Exercice 6 .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x\,|x|}{x^2+4}$

1. *Cherchons D_f :*

$$\begin{aligned} D_f &= \left\{ x \in \mathbb{R} / \underbrace{x^2+4 \neq 0}_{toujours\ vérifiée} \right\} \\ &= \mathbb{R} \end{aligned}$$

2. *La parité de la fonction f :*

   - *Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$.*
   - *Soit $x \in \mathbb{R}$. On a* $f(-x) = \dfrac{-x\,|-x|}{(-x)^2+4} = \dfrac{-x\,|x|}{x^2+4} = -f(x)$.

     Donc, la fonction f est impaire.

     La courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, est symétrique par rapport à l'origine du repère.

3. Soient x et y deux éléments distincts de $\mathbb{R}^+$, calculons : $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\dfrac{x^2}{x^2+4}-\dfrac{y^2}{y^2+4}}{x-y} \\
&= \frac{\dfrac{x^2(y^2+4)-y^2(x^2+4)}{(x^2+4)(y^2+4)}}{x-y} \\
&= \frac{x^2y^2+4x^2-y^2x^2-4y^2}{(x^2+4)(y^2+4)(x-y)} \\
&= \frac{4(x-y)(x+y)}{(x^2+4)(y^2+4)(x-y)} \\
&= \frac{4(x+y)}{(x^2+4)(y^2+4)}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{4(x+y)}{(x^2+4)(y^2+4)} \qquad \text{où } x,y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \neq y$$

On a $x \geq 0$ et $y \geq 0$, donc : $x+y \geq 0$, et comme $x \neq y$ alors $4\,(x+y) > 0$. Comme $(x^2+4)(y^2+4) > 0$. Ce qui signifie que :

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \text{où } x,y \in \mathbb{R}^+ \text{ et } x \neq y$$

Donc, la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$, et puisque elle est impaire alors la fonction f est ***strictement croissante sur*** $\mathbb{R}^-$.

4. Tableau de variations de la fonction f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f		$\nearrow$	0	$\nearrow$	

Exercice 7 .

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par : $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$

1. La parité de la fonction f :

   On a $D_f = \mathbb{R}$

- *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on a* $-x \in \mathbb{R}$.
- *Soit* $x \in D_f$. *On a* $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2+1} = -\left(\dfrac{x}{x^2+1}\right) = -f(x)$.

  Donc, la fonction f *est impaire.*

2. **a)** *Soit* x *et* y *deux éléments distincts de* $\mathbb{R}$, *calculons :* $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$

$$\begin{aligned}
\frac{f(x)-f(y)}{x-y} &= \frac{\dfrac{x}{x^2+1}-\dfrac{y}{y^2+1}}{x-y} \\
&= \frac{\dfrac{x(y^2+1)-y(x^2+1)}{(x^2+1)(y^2+1)}}{x-y} \\
&= \frac{x(y^2+1)-y(x^2+1)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{xy^2+x-yx^2-y}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{-xy(x-y)+(x-y)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{(x-y)(1-xy)}{(x-y)(x^2+1)(y^2+1)} \\
&= \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)}
\end{aligned}$$

donc

$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = \frac{1-xy}{(x^2+1)(y^2+1)} \quad \text{où } x,y\in\mathbb{R} \quad \text{et } x \neq y$$

- *Soit* x *et* y *deux éléments de* $[1,+\infty[$ *tels que :* $x \neq y$.

  On a $x \geq 1$ *et* $y \geq 1$ *donc :* $xy \geq 1$, *et comme* $x \neq y$ *alors :* $xy > 1$, *d'où* $1-xy<0$. *Comme* $(x^2+1)(y^2+1)>0$.

  Donc

  $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} < 0 \ \text{où } x,y \in [1,+\infty[\quad \text{et } x \neq y$$

  Donc, la fonction f *est strictement décroissante sur* $[1,+\infty[$.
- *Soit* x *et* y *deux éléments de* $[0,1]$ *tels que :* $x \neq y$.

  On a $0 \leq x \leq 1$ *et* $0 \leq y \leq 1$ *donc :* $0 \leq xy \leq 1$, *et comme* $x \neq y$ *alors :* $0 \leq xy < 1$, *d'où* $1-xy>0$. *Comme* $(x^2+1)(y^2+1)>0$.

  Donc

  $$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} > 0 \quad \text{où } x,y \in [0,1] \quad \text{et } x \neq y$$

  Donc, la fonction f *est strictement croissante sur* $[0,1]$.

b) *Soit* $x \in [0,1]$, *on a* $0 \leq x \leq 1$, *et comme* f *est strictement croissante sur* $[0,1]$ *alors*

$$f(0) \leq f(x) \leq f(1)$$

puisque $f(0) = 0$ *et* $f(1) = \dfrac{1}{2}$, *donc* $0 \leq f(x) \leq \dfrac{1}{2}$.

c) *Le tableau de variations de* f *sur* $\mathbb{R}$.

La fonction f *est strictement croissante sur* $[0,1]$, *et puisque elle est impaire alors* f *est strictement croissante sur* $[-1,0]$, *de plus, on sait que la fonction* f *est strictement décroissante sur* $[1,+\infty[$, *et comme elle est impaire alors* f *est strictement décroissante sur* $]-\infty,-1]$.

Donc, on déduit le tableau de variations suivant :

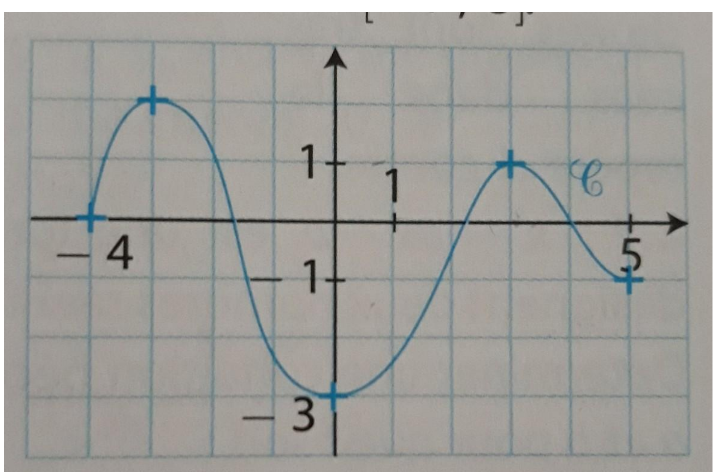
x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$
f	↘	$-1/2$	↗ 0 ↗	$1/2$	↘

3. • $\dfrac{1}{2}$ *est une valeur maximale locale de la fonction en point d'abscisse* 1 *sur l'intervalle* $]0,2[$.

• $\dfrac{-1}{2}$ *est une valeur minimale locale de la fonction* f *en point d'abscisse* -1 *sur l'intervalle* $]-2,0[$.

Exercice 8 .

Soit f *une fonction définie sur* $I = [-4,5]$ *dont la courbe est la suivante :*



1. Le tableau de variations de f sur I :

x	-4		-3		0		3		5
f	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1

2. ♠ *On cherche les extremums de f :*

- ♣ 2 *est une valeur maximale globale de f en point d'abscisse* -3 *sur I.*
- ♣ -3 *est une valeur minimale globale de f en point d'abscisse* 0 *sur I.*

♠ *L'équation $f(x) = 1$ admet* 3 *solutions réelles distinctes.*

3. Graphiquement on a : $f([-2,0]) = [-3,1]$ *et* $f([-3,4]) = [-3,2]$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com