

Série d'exercices sur les limites

Exercice 1 .

Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - 3x + 1}{\sqrt{x} - 1}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - \sqrt{x+4}}{1 - \sqrt{x+1}} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - \sqrt{x^2 - x + 6}$$

Exercice 2 .

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2}{3}\sqrt{x+1} & \text{si } x \geq -1 \\ f(x) = \frac{1-x^2}{x+2} & \text{si } x < -1 \end{cases}$$

1. Justifier que : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2\}$.
2. Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$.
4. Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Exercice 3 .

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{2 + \cos x}{1 + \sqrt{x}}$.

1. Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[), |f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$.
2. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 4 .

Soit f la fonction numérique définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}$

1. Montrer que : $(\forall x \in]0, +\infty[), \left| f(x) - \frac{1}{2} \right| \leq \frac{1}{x^2}$
2. En déduire : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 5 .

Calculer la limite suivante : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left(\frac{2}{\cos x} + \cos x - 3 \right)$.

Exercice 6 .

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{1 - x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}$.

1. Montrer que : $\forall x > 1, f(x) = 1$.
2. Montrer que : $\left(\forall x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \right), f(x) = \frac{1 - x^2}{1 + x^2}$.
3. Étudier la limite de la fonction f en 1.
4. a) Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*), x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$.
 b) Dédurre que : $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1$.

Exercice 7 .

Calculer : $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$ et $\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$.

Exercice 8 .

Soit f une fonction définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 + (m+1)x - 3}{x^2 + x} & \text{si } x < -1 \\ f(x) = \frac{-2x + b}{\sqrt{x^2 + 2} + 1} & \text{si } x \geq -1 \end{cases}$$

1. Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$.
2. Calculer suivant les valeurs de m , $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x)$.
3. Calculer $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$.
4. En déduire les valeurs de m et b pour que f admette une limite en $a = -1$.

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

www.etude – generale.com