Correction de la série N2

Exercice 1 *On considère la fonction F définie sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par :* $F(x) = 4x(\pi - x) - \pi \sin^2 x$.

1. *La fonction F est deux fois dérivale sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ comme la somme de deux fonctions deux fois dérivables sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.* $\left(x \longmapsto 4x(\pi - x) \text{ et } x \longmapsto -\pi \sin^2 x\right)$.
   Soit $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} F'(x) &= 4(\pi - x) - 4x - 2\pi \sin x . \cos x \\ &= 4(\pi - 2x) - \pi \sin(2x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} F''(x) &= -8 - \pi \times 2\cos(2x) \\ &= -8 - 2\pi \cos(2x) \\ &= -2(4 + \pi \cos(2x)) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \ F''(x) = -2(4 + \pi \cos(2x))$$

■ *Soit* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned} |\cos(2x)| &\leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -1 \leq \cos(2x) \leq 1 \\ &\Longleftrightarrow -\pi \leq \pi \cos(2x) \leq \pi \\ &\Longleftrightarrow 4 - \pi \leq 4 + \pi \cos(2x) \leq 4 + \pi \\ &\Longleftrightarrow -2(4 + \pi) \leq -2(4 + \pi \cos(2x)) \leq -2(4 - \pi) \\ &\Longleftrightarrow -2(4 + \pi) \leq F''(x) \leq -2(4 - \pi) \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \ F''(x) < 0.$$

Ceci signifie que la fonction F' est strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

■ *Soit* $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \underbrace{\Longrightarrow}_{F' \text{ est strictement décroissante}} F'\left(\frac{\pi}{2}\right) \leq F'(x) \leq F'(0) \Longrightarrow 0 \leq F'(x) \leq 4\pi$$

Donc

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right), \ F'(x) \geq 0$$

Ceci signifie que F' est positive sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

2. *On déduit que :* $\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right),\ \sin^2 x\leq\frac{4}{\pi}x\left(\pi-x\right).$

Comme la fonction F' est positive sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ *et puisque elle ne s'annule qu'en un nombre fini de points alors la fonction* F *est strictement croissante sur* $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

Soit $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$.

$$\begin{aligned}0 &\leq x\leq\frac{\pi}{2}\\ &\Longrightarrow F\left(0\right)\leq F(x)\leq F\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ &\Longrightarrow 0\leq F\left(x\right)\leq\pi^2-\pi\end{aligned}$$

Donc

$$F(x)\geq 0.$$

Par suite

$$\begin{aligned}F(x) \geq 0 &\Longleftrightarrow 4x\left(\pi-x\right)-\pi\sin^2 x\geq 0\\ &\Longleftrightarrow \pi\sin^2 x\leq 4x\left(\pi-x\right)\\ &\Longleftrightarrow \sin^2 x\leq\frac{4}{\pi}x(\pi-x)\end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\right),\sin^2 x\leq\frac{4}{\pi}x(\pi-x).$$

Exercice 2 *Soit* f *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$\begin{cases} f\left(x\right)=\sqrt{\frac{x}{x^2+1}} & si\ \ x\succ 0\\ f\left(x\right)=\sqrt{x^2+1}-1 & si\ x\leq 0\end{cases}$$

1. **a)** *Calculons :* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty}f\left(x\right)$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty}f\left(x\right)$.

■

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{\frac{x}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=\lim_{x\longrightarrow+\infty}\sqrt{\frac{1}{x\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}}=0$$

■

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty}f\left(x\right)=\lim_{x\longrightarrow-\infty}\sqrt{x^2+1}-1=+\infty$$

b) *La dérivabilité de* f *au point* 0.

■

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow0^+}\frac{f\left(x\right)-f\left(0\right)}{x-0} &= \lim_{x\longrightarrow0^+}\frac{\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}}{x}\\ &= \lim_{x\longrightarrow0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2\left(x^2+1\right)}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow0^+}\sqrt{\frac{x}{x^2\left(x^2+1\right)}}\\ &= \lim_{x\longrightarrow0^+}\sqrt{\frac{1}{x\left(x^2+1\right)}}=+\infty\end{aligned}$$

f n'est pas dérivable à droite de 0.La courbe (C_f) admet une demi-tangente verticale vers le haut à droite en point d'abscisse 0.

■

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} &= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x^2}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0^-}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}=0=f'_g(0)
\end{aligned}$$

f est dérivable à gauche de 0. La courbe (C_f) admet une demi-tangente horizontale à gauche en point d'abscisse 0. d'équation

$$\begin{cases} y=0\\ x\le 0\end{cases}$$

En résumé, la fonction f n'est pas dérivable en $x_0=0$.

2. *Les branches infinies de la courbe (C_f).*

- ■ *Au voisinage de $+\infty$.*

  On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow +\infty} f(x)=0$.

  La courbe (C_f) admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $+\infty$.

- ■ *Au voisinage de $-\infty$.*

  On a : $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty} f(x)=+\infty$. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow -\infty}\frac{f(x)}{x}$:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{f(x)}{x} &= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x^2+1-1}{x\left(\sqrt{x^2+1}+1\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{x}{x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}\right)}\\
&= \lim_{x\longrightarrow -\infty}\frac{1}{-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+\frac{1}{x}}=-1
\end{aligned}$$

Calculons : $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x)+x$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x)+x &= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \sqrt{x^2+1}-1+x \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} -x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-1+x \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\left(-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}+1\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\left(1-\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\left(\frac{1-\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\left(\frac{\frac{-1}{x^2}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-\frac{1}{x}\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} x\times\frac{1}{x}\left(\frac{\frac{-1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1\right) \\
&= \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\frac{-1}{x}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}-1=-1
\end{aligned}$$

La courbe (C_f) *admet une asymptote oblique d'équation* $y=-x-1$ *au voisinage de* $-\infty$.

3. **a)**

- *La fonction* f *est dérivable sur* $]0,+\infty[$.
  Soit $x\in\,]0,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\left(\frac{x}{x^2+1}\right)'}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \\
&= \frac{\frac{\left(x^2+1\right)-2x^2}{(x^2+1)^2}}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}} \\
&= \frac{1-x^2}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\left(x^2+1\right)^2}
\end{aligned}$$

- *La fonction* f *est dérivable sur* $]-\infty,0[$.

Soit $x \in]-\infty, 0[$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \end{aligned}$$

donc on déduit

$$\begin{cases} f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\,(x^2+1)^2} & si \quad x > 0 \\ \\ f'(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} & si \quad x < 0 \end{cases}$$

b) *Si* $x < 0$ *alors* $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}} < 0$ *donc* $f'(x) < 0$ *pour tout* $x \in]-\infty, 0[$.

si $x > 0$ *on a* $f'(x) = \dfrac{1-x^2}{2\sqrt{\frac{x}{x^2+1}}\,(x^2+1)^2}$ *donc le signe de* $f'(x)$ *est celui de* $1-x^2$

$$1 - x^2 = 0 \iff x = 1 \quad ou \quad x = -1$$

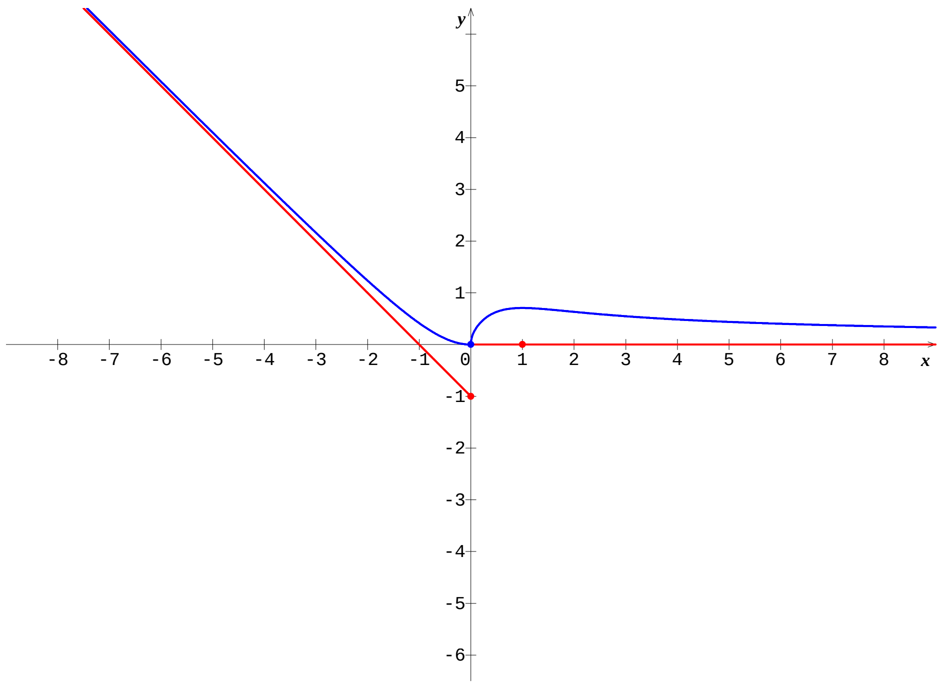
Donc

x	0		1		$+\infty$
$1-x2$		$+$	0	$-$	

D'où le tableau de variations de f *est le suivant*

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)}$	$\searrow$	0

4. La courbe (C_f) *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.



FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com