Correction de la série

Exercice 1 .

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x}-1}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\quad (F.I)$

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2x^2-3x+1}{\sqrt{x}-1}=\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{(2x^2-3x+1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}$

et comme $2x^2-3x+1=(x-1)(2x-1)$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 1}\frac{(2x-1)(x-1)(\sqrt{x}+1)}{x-1}=\lim_{x\longrightarrow 1}(2x-1)\left(\sqrt{x}+1\right)=2.$$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+1}}=\text{"}\dfrac{0}{0}\text{"}\quad (F.I)$

On a

$$\begin{aligned}\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{2-\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+1}} &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\left(2-\sqrt{x+4}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{\left(1-\sqrt{x+1}\right)\left(1+\sqrt{x+1}\right)\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{[4-(x+4)]\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{[1-(x+1)]\left(2+\sqrt{x+4}\right)}\\ &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{-x\left(1+\sqrt{x+1}\right)}{-x\left(2+\sqrt{x+4}\right)}=\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1+\sqrt{x+1}}{2+\sqrt{x+4}}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

donc $\lim\limits_{x\longrightarrow 1}\dfrac{2-\sqrt{x+4}}{1-\sqrt{x+1}}=\dfrac{1}{2}.$

♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} x+2-\sqrt{x^2-x-6} = "+\infty-\infty" \quad (F.I)$

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow+\infty} x+2-\sqrt{x^2-x-6} &= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\left((x+2)-\sqrt{x^2-x-6}\right)\left((x+2)+\sqrt{x^2-x-6}\right)}{(x+2)+\sqrt{x^2-x-6}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{(x+2)^2-(x^2-x-6)}{(x+2)+\sqrt{x^2-x-6}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{4x+4+x+6}{(x+2)+\sqrt{x^2-x-6}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{5x+10}{(x+2)+\sqrt{x^2-x-6}} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x\left(5+\dfrac{10}{x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}\right)} \\
&= \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{5+\dfrac{10}{x}}{1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}}}
\end{aligned}$$

et comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 1+\dfrac{2}{x}+\sqrt{1-\dfrac{1}{x}-\dfrac{6}{x^2}} = 2$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 5+\dfrac{10}{x} = 5$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} x+2-\sqrt{x^2-x-6} = \frac{5}{2}$$

Exercice 2 .

On considère la fonction f définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1}\ ,\ si\ x \geq -1 \\[2ex] f(x) = \dfrac{1-x^2}{x+2}\ ,\quad si\ x < -1 \end{cases}$

1. *On montre que* $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$.
   On a $D_{f_1} = [-1,+\infty[$ *et* $D_{f_2} = \mathbb{R}\setminus\{-2\}$ *donc*

$$\begin{aligned}
D_f &= ([-1,+\infty[\cap[-1,+\infty[)\cup(\mathbb{R}\setminus\{-2\}\cap]-\infty,-1[) \\
&= ([-1,+\infty[\cap[-1,+\infty[)\cup[(]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[)\cap]-\infty,-1[] \\
&= [-1,+\infty[\cup((]-\infty,-2[\cap]-\infty,-1[)\cup(]-\infty,-1[\cap]-2,+\infty[)) \\
&= [-1,+\infty[\cup(]-\infty,-2[\cup]-2,-1[) \\
&=]-\infty,-2[\cup]-2,+\infty[\\
&= \mathbb{R}\setminus\{-2\}
\end{aligned}$$

2. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^+} \dfrac{2}{3}\sqrt{x+1} = \dfrac{2}{3}\sqrt{-1+1} = 0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} \dfrac{1-x^2}{x+2} = \dfrac{1-1}{-1+2} = 0.$

3. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{3}\sqrt{x+1} = +\infty$. *Car* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{x+1} = +\infty$.

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{\frac{2}{3}\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{3}\frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{2}{3}\sqrt{\frac{x+1}{x^2}}$$

comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x+1}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{1}{x} = 0$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \sqrt{\frac{x+1}{x^2}} = 0$ *d'où*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

4. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1-x^2}{x+2} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} -x = +\infty$.

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{\frac{1-x^2}{x+2}}{x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1-x^2}{x(x+2)} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{1-x^2}{x^2+2x} = \lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1$$

d'où

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$$

Exercice 3 .

On considère la fonction f *définie sur* $[0,+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{2+\cos x}{1+\sqrt{x}}$.

1. *Montrons que :* $(\forall x \in]0,+\infty[)$, $|f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$.

   Soit $x \in]0,+\infty[$.

   On a : $|f(x)| = \left|\frac{2+\cos x}{1+\sqrt{x}}\right| = |2+\cos x| \times \left|\frac{1}{1+\sqrt{x}}\right| = |2+\cos x| \times \frac{1}{1+\sqrt{x}}$.

   On a $1+\sqrt{x} \geq \sqrt{x}$ *donc* $\frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{1}{\sqrt{x}}$ (1)

   d'autre part, on a $|2+\cos x| \leq |2| + |\cos x| \leq 3$ (2)

   donc d'après (1) *et* (2) *on déduit que* $|2+\cos x| \times \frac{1}{1+\sqrt{x}} \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$ *d'où*

$$(\forall x \in]0,+\infty[), \quad |f(x)| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}.$$

2. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$ *et comme* $|f(x) - 0| \leq \frac{3}{\sqrt{x}}$ *pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *donc d'après limites et ordre on déduit que*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = 0$$

Exercice 4 .

Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}+x}$.

1. *Montrons que :* $(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ \left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$.

   Soit $x \in]0,+\infty[$

   On a

$$
\begin{aligned}
\left|f(x) - \frac{1}{2}\right| &= \left|\frac{x}{\sqrt{1+x^2}+x} - \frac{1}{2}\right| \\
&= \left|\frac{2x - \left(\sqrt{x^2+1}+x\right)}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\right| \\
&= \left|\frac{x - \sqrt{x^2+1}}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)}\right| \\
&= \left|\frac{\left(x - \sqrt{x^2+1}\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right| \\
&= \left|\frac{-1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}\right| \\
&= \frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2}
\end{aligned}
$$

   comme $\sqrt{1+x^2}+x \geq x$ *alors* $\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2 \geq x^2$ *donc* $\dfrac{1}{\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} \leq \dfrac{1}{x^2}$ *d'où*

$$\frac{1}{2\left(\sqrt{1+x^2}+x\right)^2} \leq \frac{1}{2x^2} \leq \frac{1}{x^2}$$

   ce qui signifie que $\left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ *donc*

$$(\forall x \in]0,+\infty[)\,,\ \left|f(x) - \frac{1}{2}\right| \leq \frac{1}{x^2}.$$

2. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ *et comme* $\left|f(x) - \dfrac{1}{2}\right| \leq \dfrac{1}{x^2}$ *pour tout* $x \in]0,+\infty[$ *donc d'après limites et ordre on déduit que*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \frac{1}{2}$$

Exercice 5 .

Calculons la limite $\lim\limits_{x\longrightarrow 0} \dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x} + \cos x - 3\right)$:

On a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3=0$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{x^2}=+\infty$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{x^2}\left(\dfrac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)=$ "$(+\infty)\times 0$" $(F.I)$

On a

$$\begin{aligned}
\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right) &= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2+\cos^2 x-3\cos x}{\cos x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{1-\cos x+1-\cos x+\cos x^2-\cos x}{\cos x}\right)\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}+\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}+\frac{\cos^2 x-\cos x}{x^2\cos x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}+\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}-\frac{\cos x\,(1-\cos x)}{x^2\cos x}\\
&= \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}+\frac{1-\cos x}{x^2\cos x}-\frac{(1-\cos x)}{x^2}
\end{aligned}$$

comme $\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2\cos x}=\lim\limits_{x\longrightarrow 0}\dfrac{1}{\cos x}\times\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\dfrac{1}{2}$ *donc*

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{2}{\cos x}+\cos x-3\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

Exercice 6 .

On considère la fonction f *définie par :* $f(x)=\dfrac{1-x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)}{1+x^2E\left(\dfrac{1}{x}\right)}$

1. *Montrons que :* $(\forall x>1)\,,\quad f(x)=1.$

   On a $x>1$ *donc* $\dfrac{1}{x}<1$ *donc* $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=0$ *d'où* $f(x)=\dfrac{1-0}{1+0}=1.$

2. *Montrons que :* $\left(\forall x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right]\right),\quad f(x)=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

   Soit $x\in\left]\dfrac{1}{2},1\right]$.

   On a $\dfrac{1}{2}<x\leq 1$ *alors* $1\leq\dfrac{1}{x}<2$ *c'est-à-dire* $\dfrac{1}{x}\in[1,2[$ *donc* $E\left(\dfrac{1}{x}\right)=1$ *d'où*

$$\left(\forall x\in\left]\frac{1}{2},1\right]\right),\ f(x)=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

3. *On a* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}f(x)=1$ *et* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}f(x)=\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=0$ *et comme* $\lim\limits_{x\longrightarrow 1^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\longrightarrow 1^-}f(x)$. *Donc* f *n'admet pas une limite en* 1.

4. **a)** *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On a $E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} < E\left(\frac{1}{x}\right) + 1$ *alors* $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$ *donc* $x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ *d'où*

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\quad x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x.$$

b) *On déduit que :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 1$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$, *on a* $x - x^2 < x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) \leq x$ *et comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x - x^2 = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x = 0$ *donc d'après limites et ordre on déduit que* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} x^2 E\left(\frac{1}{x}\right) = 0$. *D'où* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{1 - x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)}{1 + x^2 E\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{1} = 1.$

Exercice 7 .

♣ *Calculons la limite :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^+} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$.

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$

Soit $x \in \left]5, 6\right[$, *on a* $E(x) = 5$, *donc* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 5^+} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5} = \lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{x} + \sqrt{5}\right)} = \lim_{x \longrightarrow 5^+} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{10}.$$

♣ *Calculons la limite :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 5^-} \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$.

On pose $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - E(x)}$

Soit $x \in \left]4, 5\right[$, *on a* $E(x) = 4$, *donc* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 4}$ *d'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 5^-} f(x) = \lim_{x \longrightarrow 5^-} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 4} = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{5}}{5 - 4} = 0.$$

Exercice 8 .

Soit f une fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{x^2+(m+1)x-3}{x^2+x} & si \quad x<-1 \\ \\ f(x) = \dfrac{-2x+b}{\sqrt{x^2+2}+1} & si \quad x \geq -1 \end{cases}$

1. ♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^2+(m+1)x-3}{x^2+x} = \lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \dfrac{x^2}{x^2} = 1.$

   ♣ $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{-2x+b}{\sqrt{x^2+2}+1} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{x\left(-2+\dfrac{b}{x}\right)}{x\left(\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+\dfrac{1}{x}\right)} = \lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} \dfrac{-2+\dfrac{b}{x}}{\sqrt{1+\dfrac{2}{x^2}}+\dfrac{1}{x}} =$
   $-2.$

2. *Calculons suivant les valeurs de m ,* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} f(x)$:

   On a $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} x^2+(m+1)x-3 = -m-3$. *Étudions le signe de x^2+x :*

   On déduit directement le tableau de signe de l'expression x^2+x

x	$-\infty$ $\quad -1 \quad\quad 0 \quad$ $+\infty$
$x2+x$	$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$

   Donc $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} x^2+x = 0^+$. *D'où*

   ♠ Si $-m-3<0$ *c-à-d* $m>-3$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} f(x) = -\infty.$

   ♠ Si $-m-3>0$ *c-à-d* $m<-3$ *donc* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^-} f(x) = +\infty.$

   ♣ Si $-m-3=0$ *c-à-d* $m=-3$ *donc* $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2+x}$ *d'où*

   $$\lim_{x\longrightarrow(-1)^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow(-1)^-} \frac{x^2-2x-3}{x^2+x} = \lim_{x\longrightarrow(-1)^-} \frac{(x+1)(x-3)}{x(x+1)} = \lim_{x\longrightarrow(-1)^-} \frac{x-3}{x} = 4.$$

3. *Calculons ,* $\lim\limits_{x\longrightarrow(-1)^+} f(x)$:

   On a
   $$\lim_{x\longrightarrow(-1)^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow(-1)^+} \frac{-2x+b}{\sqrt{x^2+2}+1} = \frac{2+b}{\sqrt{3}+1}$$

4. *La fonction f admet une limite en -1 si et seulement si* $\lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^+} f(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^-} f(x)$.

On a $\lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^+} f(x) = \dfrac{2+b}{\sqrt{3}+1}$ *et comme* $\lim\limits_{x \longrightarrow (-1)^-} f(x) = 4$ *pour* $m = -3$ *donc on déduit que f admet une limite en -1 si $m = -3$ et $b = 4\sqrt{3}+2$.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com