Correction devoir maison N3

Exercice 1 *1. On résout dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante $(E) : z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.*

Calculons Δ :

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2 - 4ac \\ &= (-\sqrt{2})^2 - 4 \times 1 \times 1 \\ &= 2 - 4 = -2 \prec 0\end{aligned}$$

l'équation admet deux solutions complexes conjuguées : z_1 et z_2.

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{-(-2)}}{2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

et comme : $z_2 = \overline{z_1} = \overline{(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2})} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$. Donc

$$S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$$

2. On pose : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

a)

- *La forme trigonométrique du nombre complexe : a.*

  Le module de a :

$$|a| = \sqrt{(\frac{\sqrt{2}}{2})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{2})^2} = \sqrt{\frac{2}{4} + \frac{2}{4}} = 1$$

  Donc

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4})$$

- *Déduire que : $a^{2020} \in \mathbb{R}$.*

  On d'après la formule de moivre :

$$\begin{aligned}a^{2020} &= \cos(\frac{2020\pi}{4}) + i\sin(\frac{2020\pi}{4}) \\ &= \cos(505\pi) + i\sin(505\pi) \\ &= \cos(\pi + 504\pi) + i\sin(\pi + 504\pi) \\ &= \cos(\pi) + i\sin(\pi) \\ &= \cos(\pi) = -1 \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

  N'oublier pas que pour tout x de $\mathbb{R}$, on a : $\cos(x + 2k\pi) = \cos x$ et $\sin(x + 2k\pi) = \sin x$.

b) *On déduit les entiers naturels n tels que : $a^n \in \mathbb{R}$.*

On a l'équivalence suivante :

$$a^n \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(a^n) = 0$$

D'après la formule de moivre, on a : $a^n = \cos(\frac{n\pi}{4}) + i\sin(\frac{n\pi}{4})$. Donc

$$\begin{aligned} a^n \quad \in \quad \mathbb{R} &\iff \sin(\frac{n\pi}{4}) = 0 \\ &\iff \frac{n\pi}{4} = k\pi \quad / \ k \in \mathbb{N} \\ &\iff n = 4k \quad / \ k \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

Donc, on déduit que a^n est un réel si, et seulement si $n = 4k$ avec k un entier naturel.

c) *Soit le nombre complexe $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}$. Montrons que : $b^2 = a$.*

$$b^2 = (\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8})^2 = \cos(\frac{2\pi}{8}) + i\sin(\frac{2\pi}{8}) = \cos(\frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} = a$$

3. **a)** *Vérifions que : $z' = bz$.*

R est la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$ transforme le point $M(z)$ en $M'(z')$. C'est-à-dire : $R(M) = M'$. Donc

$$\begin{aligned} R(M) \quad = \quad M' &\iff z' - o = e^{i\frac{\pi}{8}}(z - o) \\ &\iff z' = e^{\frac{\pi}{8}i} z \end{aligned}$$

et comme : $b = \cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8} = e^{i\frac{\pi}{8}}$. Donc : $z' = bz$.

b)

- *On cherche l'image de C par R.*

  Notons C' l'image de C par R.C'est-à-dire : $R(C) = C'$. Donc

$$c' = bc = b \times 1 = b$$

  ce qui signifie que le point C' est le point B, c'est-à-dire l'image de C par R est B.

- *Montrons que A est l'image de B.*

  Notons B' l'image de B par R. C'est-à-dire : $R(B) = B'$. Donc

$$b' = bb = b^2 = a$$

  ce qui signifie que le point B' est le point A, c'est-à-dire l'image de B par R est A.

4. **a)** *Montrons que :* $|a-b| = |b-c|$.

On a :

$$|a-b| = \left|b^2 - b\right| = |b(b-1)| = |b|\,|b-1| = |b-1|\,, car : |b| = \left|e^{i\frac{\pi}{8}}\right| = 1.$$

et

$$|b-c| = |b-1|$$

Donc, on remarque que : $|a-b| = |b-c|$.

- *La nature du triangle ABC.*
  On a : $|a-b| = |b-c|$*, c'est équivaut à :* $AB = CB$*. Ceci signifie que le triangle* ABC *est isocèle en* B.

b) *La mesure d'angle* $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$:

$$\begin{aligned}
(\overline{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}}) &\equiv \arg(\frac{c-b}{a-b})\ [2\pi] \\
&\equiv \arg(\frac{1-b}{b^2-b})\ [2\pi] \\
&\equiv \arg(\frac{-(b-1)}{b(b-1)})\ [2\pi] \\
&\equiv \arg(\frac{-1}{b})\ [2\pi] \\
&\equiv \arg(-1) - \arg(b)\ [2\pi] \\
&\equiv \pi - \frac{\pi}{8}\ [2\pi] \\
&\equiv \frac{7\pi}{8}\ [2\pi]
\end{aligned}$$

Donc, $\frac{7\pi}{8}$ *est une mesure de l'angle* $(\widehat{\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}})$.

5. Soit T *la translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$.

a) *Vérifions que :* $d = b^2 + 1$.
On a D *est l'image de* A *par* T*. C'est-à-dire :* $T_{\overrightarrow{u}}(A) = D$.

$$\begin{aligned}
T_{\overrightarrow{u}}(A) &= D \iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{u} \\
&\iff z_{\overrightarrow{AD}} = z_{\overrightarrow{u}} \\
&\iff d - a = 1 \\
&\iff d = a + 1 \\
&\iff d = b^2 + 1
\end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $\frac{b^2+1}{b} = b + \overline{b}$.

$$\frac{b^2+1}{b} = \frac{b^2}{b} + \frac{1}{b} = b + \frac{1}{e^{i\frac{\pi}{8}}} = b + \frac{e^{-i\frac{\pi}{8}}}{1} = b + \overline{b}$$

- *On déduit que les points O, B et D sont alignés.*

  les points O, B et D sont alignés si, et seulement si $\frac{d-o}{b-o} \in \mathbb{R}$.

  $$\frac{d-o}{b-o} = \frac{b^2+1}{b} = b+\overline{b} = (\cos\frac{\pi}{8}+i\sin\frac{\pi}{8})+(\cos(-\frac{\pi}{8})+i\sin(-\frac{\pi}{8})) = 2\cos\frac{\pi}{8} \in \mathbb{R}$$

  Ce qui signifie que les points O, B et D sont alignés.

Exercice 2 *Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$. On note les points A, B et I d'affixes respectives $z_A = 1+i\sqrt{3}$, $z_B = 2i$ et $z_I = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}+2}{2}$.*

1. **a)** *La forme exponentielle des complexes : z_A et z_B*

On a : $|z_A| = \sqrt{1+(\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$. Donc :

$$z_A = 1+i\sqrt{3} = 2(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = 2(\cos(\frac{\pi}{3})+i\sin(\frac{\pi}{3})) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

On a : $|z_B| = 2$. Donc :

$$z_B = 2i = 2(\cos(\frac{\pi}{2})+i\sin(\frac{\pi}{2})) = 2e^{i\frac{\pi}{2}}$$

b) *Vérifions que les points A et B appartiennent au cercle (C) :*

(C) est le cercle de centre O et de rayon 2. Alors on a pour tout point M d'affixe z appartient à (C) :

$$M \in (C) \iff OM = 2 \iff |z-o| = 2 \iff |z| = 2$$

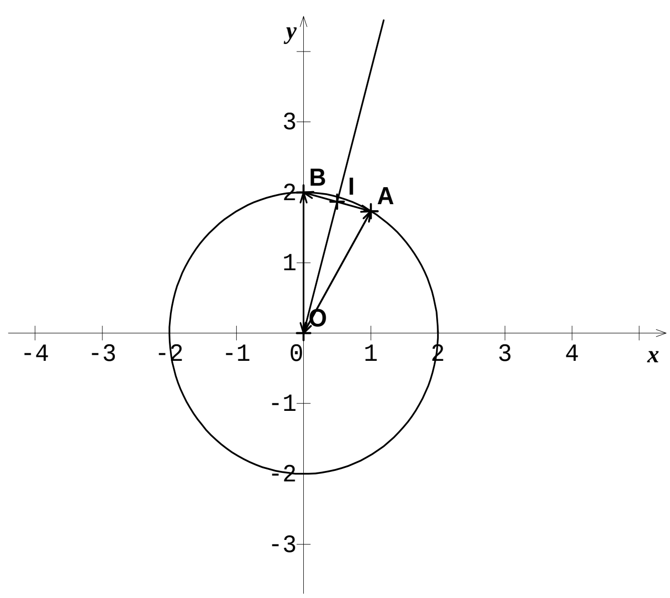
et comme : $|z_A| = 2$, ceci signifie que : $A \in (C)$. De même on a : $|z_B| = 2$, alors : $B \in (C)$.

c) *Vérifions que I est le milieu de $[AB]$:*

$$z_I = \frac{z_A+z_B}{2} = \frac{1+i\sqrt{3}+2i}{2} = \frac{1}{2}+i(\frac{\sqrt{3}+2}{2})$$

Donc, le point I est le milieu du segment $[AB]$.

d)



2. **a)** *Justifions que $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.*

Le triangle AOB est isocèle en O. En effet :

$$OA = |z_A| = 2 \quad et \quad OB = |z_B| = 2$$

et comme I est le milieu de $[AB]$, alors : $(OI) \perp (AB)$. Ce qui signifie que (OI) est la médiatrice du côté $[AB]$ dans le triangle AOB, et comme le triangle est isocèle alors $[OI)$ est la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

b) *Vérifions que* $\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]$:

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right) &\equiv \arg\left(\frac{b-o}{a-o}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg\left(\frac{b}{a}\right)[2\pi] \\
&\equiv \arg(b) - \arg(a)\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{6}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

c) *Montrons que :* $\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$:

On utilise la relation de ***chasles****, on obtient :*

$$\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv \left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}}\right) + \left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\right)[2\pi] \qquad (1)$$

on cherche une mesure pour l'angle orienté : $\left(\widehat{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}}\right)$.

$$\begin{aligned}
\left(\overline{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}}\right) &\equiv \arg(a)\,[2\pi] \\
&\equiv \frac{\pi}{3}\,[2\pi]
\end{aligned}$$

on cherche une mesure pour l'angle orienté : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\right)$.

On a $\widehat{AOI} + \widehat{IOB} = \widehat{AOB}$ et comme $[OI)$ est bissectrice de $\widehat{AOB}$ donc $2\widehat{AOI} = \widehat{AOB}$ c'est-à-dire

$$\widehat{AOI} = \frac{\widehat{AOB}}{2} = \frac{\pi}{12}$$

et puisque l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\right)$ *est orienté positivement donc* $\left(\overline{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{\pi}{12}\,[2\pi]$.

On remplace dans (1), *on obtient :*

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OI}}\right) &\equiv \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{12}\,[2\pi]\\ &\equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]\end{aligned}$$

On obtient finalement :

$$\left(\overrightarrow{\overrightarrow{u},\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{5\pi}{12}\,[2\pi]$$

d) *On déduit que :* $z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$.

Calculons le module de z_I :

$$|z_I|=\sqrt{(\frac{1}{2})^2+(\frac{\sqrt{3}+2}{2})^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3+4\sqrt{3}+4}{4}}=\sqrt{\frac{8+4\sqrt{3}}{4}}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$$

Donc

$$z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})=\sqrt{2+\sqrt{3}}e^{i\frac{5\pi}{12}}$$

3. *Les valeurs exactes de :* $\cos(\frac{5\pi}{12})$ *et* $\sin(\frac{5\pi}{12})$.

on a

$$z_I=\sqrt{2+\sqrt{3}}(\cos\frac{5\pi}{12}+i\sin\frac{5\pi}{12})$$

et comme : $z_I=\frac{1}{2}+i(\frac{\sqrt{3}+2}{2})$. *Donc, par identification on obtient :*

$$\begin{aligned}&\left\{\begin{array}{l}\sqrt{2+\sqrt{3}}\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{2}\\[2ex] \sqrt{2+\sqrt{3}}\sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}+2}{2}\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{l}\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{1}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\\[2ex] \sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{3}+2}{2\sqrt{2+\sqrt{3}}}\end{array}\right.\\ \Longleftrightarrow &\left\{\begin{array}{l}\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}\\[2ex] \sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}+2)}{2(2+\sqrt{3})}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}+2)}{4+2\sqrt{3}}\end{array}\right.\end{aligned}$$

Donc, on obtient

$$\cos(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{4+2\sqrt{3}}\quad et \quad \sin(\frac{5\pi}{12})=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}(\sqrt{3}+2)}{4+2\sqrt{3}}$$

Exercice 3 (*Equation différentielle*)

Partie N1 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y' + y = 2e^{-x}$.

1) *On résout l'équation différentielle* $(E') : y' + y = 0$.

On reconnait une équation différentielle du type : $y' = ay$ *avec* $a = -1$. *Donc, les solutions de l'équation différentielle* (E') *est l'ensemble des fonctions :* $y(x) = \lambda e^{-x}$ *avec* λ *un réel.*

2) *Vérifions que la fonction* g *est solution de* (E) :

La fonction g *est dérivable sur* $\mathbb{R}$, *et on a :* $g'(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x}$, *donc :*

$$g'(x) + g(x) = 2e^{-x} - 2xe^{-x} + 2xe^{-x} = 2e^{-x}$$

Ceci signifie que la fonction g *est solution de* (E).

3) a) *Les solutions de l'équation différentielle* (E) *est l'ensemble des fonctions :*

$$h(x) = f(x) + g(x) = \lambda e^{-x} + 2xe^{-x} = (\lambda + 2x)e^{-x} \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}$$

b) h *est une solution de* (E) *donc* $h(x) = (\lambda + 2x)e^{-x}$, *et comme* $h(0) = -1$ *alors on obtient :*

$$(\lambda + 2 \times 0)e^0 = -1 \iff \lambda = -1$$

Donc

$$h(x) = (2x - 1)e^{-x}$$

Partie N2 *On considère l'équation différentielle* $(E) : y'' - 3y' + 2y = -1 - 2x$.

1) *On résout l'équation différentielle* $(E') : y'' - 3y' + 2y = 0$.

L'équation caractéristique $(E'') : r^2 - 3r + 2 = 0$.

Calculons Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1 \succ 0$$

Donc, l'équation (E'') *admet deux solutions réelles distinctes :* r_1 *et* r_2.

$$r_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+1}{2} = 2 \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1}{2} = 1$$

Donc, les solutions de l'équation différentielle (E') *est l'ensemble des fonctions :* $y(x) = Ae^{2x} + Be^{x}$ *avec* A *et* B *deux réels.*

2) *La fonction* g *étant solution particulière de* (E), *elle vérifie :*

$$\begin{aligned} g''(x) - 3g'(x) + 2g(x) &= -1 - 2x \\ &\iff -3a + 2(ax + b) = -1 - 2x \\ &\iff -3a + 2ax + 2b = -1 - 2x \\ &\iff -3a + 2b + 2ax = -1 - 2x \end{aligned}$$

par identification des coefficients on obtient donc :

$$\begin{cases} -3a + 2b = -1 \\ \\ \quad 2a = -2 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} b = -2 \\ \\ a = -1 \end{cases}$$

Donc, on obtient

$$g(x) = -x - 2$$

3) *La solution générale de l'équation* (E) *est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre* (E') *et d'une solution particulière de l'équation* (E)*. Donc Les solutions de l'équation différentielle* (E) *est l'ensemble des fonctions :*

$$y(x) = Ae^{2x} + Be^{x} - x - 2 \;\; avec\ A\ et\ B\ deux\ réels$$

4) *La fonction* f *est solution de* (E) *donc* $f(x) = Ae^{2x} + Be^{x} - x - 2$

Cherchons A *et* B*.*

$$f(0) = 0 \iff Ae^{0} + Be^{0} - 0 - 2 = 0 \iff A + B = 2$$

D'autre part, calculons $f'(x)$ *:*

$$f'(x) = 2Ae^{2x} + Be^{x} - 1$$

Donc

$$f'(0) = 2 \iff 2A + B - 1 = 2 \iff 2A + B = 3$$

On obtient le système suivant : $\begin{cases} A + B = 2 \\ \\ 2A + B = 3 \end{cases}$*. Donc*

$$\begin{cases} A + B = 2 & (1) \\ \\ 2A + B = 3 & (2) \end{cases} \iff \begin{cases} A + B = 2 & (1) \\ \\ A = 1 & (2) - (1) \end{cases} \iff \begin{cases} B = 1 \\ \\ A = 1 \end{cases}$$

Donc

$$f(x) = e^{2x} + e^{x} - x - 2$$

FIN

www.etude – generale.com

Pr : Yahya MATIOUI