Correction du devoir Maison N3

Exercice 1 .

ABC est un triangle. Soit M le milieu du $[AB]$ et I est le milieu du $[MC]$. Soit K un point du plan tel que $\overrightarrow{CK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

1. *Montrons que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$*

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AI} &= \overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MI}\\
&= \overrightarrow{AM}+\frac{\overrightarrow{MC}}{2}\\
&= \overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{MA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{AM}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

   donc

$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CK}\\
&= \overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\\
&= \overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

   donc

$$\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$$

2. *On déduit que les point A, I et K sont alignés.*

On a
$$\overrightarrow{AI}=\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{3}{4}\overrightarrow{AK}$$

donc on déduit que les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont colinéaires, ceci signifie que les points A, I et K sont alignés.

Exercice 2 .

$ABCD$ est un quadrilatère convexe, I et J respectivement les milieux de $[AB]$ et $[CD]$.

1. *Montrons que :* $\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)$.

   On a
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\\
&= \frac{\overrightarrow{BA}}{2}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}\\
&= \frac{\overrightarrow{BA}}{2}+\overrightarrow{AC}+\frac{\overrightarrow{CD}}{2}\\
&= \frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{CA}}{2}+\overrightarrow{AC}+\frac{\overrightarrow{CA}}{2}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}\\
&= \frac{\overrightarrow{BC}}{2}+\frac{\overrightarrow{AD}}{2}-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}+\overrightarrow{AC}-\frac{\overrightarrow{AC}}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right)
\end{aligned}$$

   donc
$$\overrightarrow{IJ}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\right).$$

2. *On suppose que $ABCD$ est un trapèze et on psoe $\overrightarrow{BC}=k\overrightarrow{AD}$ avec $k\in\mathbb{R}^*$. M est le milieu de $[AC]$ et N est le milieu de $[BD]$.*

   a) *Montrons que :* $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

   On a $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BN}=\frac{\overrightarrow{AB}}{2}+\frac{\overrightarrow{BD}}{2}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. (1)

   D'autre part , on a $\overrightarrow{MJ}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AJ}=\frac{\overrightarrow{CA}}{2}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. (2)

   Donc d'après (1) *et* (2) *on déduit que* $\overrightarrow{IN}=\overrightarrow{MJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$.

   b) *Montrons que :* $\overrightarrow{IJ}=\left(\frac{k+1}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

On a $\overrightarrow{IJ} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}\right)$ *et comme* $\overrightarrow{BC} = k\overrightarrow{AD}$ *donc*

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AD} + k\overrightarrow{AD}\right) = \left(\frac{k+1}{2}\right)\overrightarrow{AD}$$

donc: $\overrightarrow{IJ} = \left(\dfrac{k+1}{2}\right)\overrightarrow{AD}$.

c) *On cherche* k *tel que* $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{NM}$.

On a $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, *cherchons* $\overrightarrow{NM}$:

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{NM} &= \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AM} \\
&= \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM} \\
&= \frac{\overrightarrow{DB}}{2} + \overrightarrow{BC} + \frac{\overrightarrow{CA}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{DA}}{2} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} + k\overrightarrow{AD} + \frac{\overrightarrow{CB}}{2} + \frac{\overrightarrow{BA}}{2} \\
&= \frac{-\overrightarrow{AD}}{2} + k\overrightarrow{AD} - \frac{k\overrightarrow{AD}}{2} \\
&= \frac{\overrightarrow{AD}}{2}(-1 + 2k - k) \\
&= \frac{\overrightarrow{AD}}{2}(k-1)
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IN} &= \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{NM} \\
&\iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AD}}{2}(k-1) \\
&\iff \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} - \frac{\overrightarrow{AD}}{2}(k-1) = 0 \\
&\iff \frac{\overrightarrow{AD}}{2}(1 - (k-1)) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{AD}(1 - k + 1) = 0 \\
&\iff \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{0} \text{ ou } k = 2
\end{aligned}$$

comme $ABCD$ *est un trapèze alors* $\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{0}$ *donc*

$$\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{NM} \iff k = 2$$

donc pour que $\overrightarrow{IN} = \overrightarrow{MJ} = \overrightarrow{NM}$ *il faut et il suffit que* $k = 2$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com