Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices sur le calcul trigonmétrique

Exercice 1 *Soit f la fonction définie par :*

$$f(x) = \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{\sin(3x)}$$

1. *Déterminer D_f.*
2. **a)** *Montrer que :* $(\forall x \in D_f),\ f(x) = \dfrac{2\cos(2x)}{\sin(3x)}$.

   b) *En déduire que :* $\dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{8}} - \dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{8}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\cos\frac{\pi}{8}}$ *et* $\tan\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.
3. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation :* $(E) : \left(\sqrt{2}-1\right)\cos(2x) + \sin(2x) = 1$.
4. *Prouver que :* $\dfrac{1}{\sin\frac{2\pi}{7}} + \dfrac{1}{\sin\frac{3\pi}{7}} = \dfrac{1}{\sin\frac{\pi}{7}}$.

Exercice 2 .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$. On pose : $A(x) = \cos(4x) - \sin x$.

Soit θ un nombre réel de l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *tel que :* $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

1. *Montrer que :* $\cos\theta = \dfrac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$ *et que :* $\cos(2\theta) = \dfrac{\sqrt{5}+1}{4}$.
2. *Calculer* $\cos(4\theta)$*, puis en déduire que :* $A(\theta) = 0$.
3. *Résoudre dans* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *l'équation :* $A(x) = 0$*, puis en déduire que :* $\theta = \dfrac{\pi}{10}$.
4. *Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante :*

$$(E) : \sqrt{10+2\sqrt{5}}.\cos x + \left(\sqrt{5}-1\right)\sin x = 2$$

Exercice 3 .

1. *Montrer que :* $\cos(4x) - \cos(2x) = (2\cos(2x)+1)(\cos(2x)-1)$.
2. *Étudier le signe de* $\cos(4x) - \cos(2x)$ *sur l'intervalle* $[0, \pi]$.
3. *En déduire les solutions de l'inéquation :* $\cos(4x) > \cos(2x)$ *sur l'intervalle* $[-\pi, \pi]$.

Exercice 4 .

Soit a un réel.

1. *Calculer* $\sqrt{2}\cos\left(a-\frac{\pi}{4}\right)$ *en fonction de* $\cos a$ *et* $\sin a$, *puis déduire que :*

$$\cos a.\sin a=\cos^2\left(a-\frac{\pi}{4}\right)-\frac{1}{2}.$$

2. *On considère la fonction numérique* f *définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x)=\cos(4x)+\sin(4x)-\sqrt{2}\sin(8x).$$

   a) *Montrer que pour tout* x *de* $\mathbb{R}$, *on a :* $f(x)=\sqrt{2}\left[-2\cos^2\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)+1\right]$.

   b) *Montrer que pour tout* x *de* $\mathbb{R}$ *on a :* $f(x)=2\sqrt{2}\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{8}\right)\left[1+2\cos\left(4x-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

3. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $f(x)=0$.

Exercice 5 .

On considère la fonction numérique définie par :

$$f(x)=\frac{\sin x-\cos x}{\sin(2x)-\sqrt{2}\cos x}$$

1. **a)** *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* $\sin(2x)-\sqrt{2}\cos x=0$.

   b) *Déduire* D_f.

2. *Montrer que :* $(\forall x\in D_f)\,,\quad f(x)=\dfrac{\tan x-1}{2\sin x-\sqrt{2}}$.

3. **a)** *Résoudre dans* $[0,2\pi]$ *l'équation* $f(x)=0$.

   b) *Résoudre dans* $[0,2\pi]$ *le système suivant :*

$$\begin{cases}\tan x>1\\ \sin x>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}$$

Exercice 6 .

Résoudre dans $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ *l'inéquation :*

$$\frac{\cos(3x)+2\cos x}{\sin x-\sqrt{3}\cos x}\geq 0.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**