

Correction de la série N2

Exercice 1 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$.

1. Montrons que $P(x)$ est divisible par $(x - 1)$:

On a $P(1) = 1^3 - 2 \times 1^2 - 5 \times 1 + 6 = 0$ donc 1 est une racine du polynôme $P(x)$ d'où le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x - 1)$.

2. a) On cherche a et b tels que $P(x) = (x - 1)(x^2 + ax + b)$:

On écrit le polynôme $(x - 1)(x^2 + ax + b)$ sous la forme réduite

$$(x - 1)(x^2 + ax + b) = x^3 + ax^2 + bx - x^2 - ax - b = x^3 + x^2(a - 1) + x(b - a) - b$$

et comme $P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ donc d'après l'égalité de deux polynômes on obtient

$$\begin{cases} a - 1 = -2 \\ b - a = -5 \\ -b = 6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2 + 1 \\ b = -5 + a \\ b = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -5 - 1 \\ b = -6 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -6 \end{cases}$$

donc $a = -1$ et $b = -6$, ce qui signifie que $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$.

b) On factorise $P(x)$ sous la forme des polynômes de degré 1 :

On a $P(x) = (x - 1)(x^2 - x - 6)$. On factorise le trinôme $x^2 - x - 6$:

Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 25 > 0$$

donc le trinôme $x^2 - x - 6$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{1 - \sqrt{25}}{2 \times 1} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + \sqrt{25}}{2 \times 1} = 3$$

d'où : $x^2 - x - 6 = (x + 2)(x - 3)$. Donc

$$P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$$

3. a) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) \geq 0$:

On a $P(x) = (x - 1)(x + 2)(x - 3)$ donc le signe de $P(x)$ dépend le signe des binômes $(x - 1)$, $(x + 2)$ et $(x - 3)$.

♣ $x - 1 = 0 \iff x = 1$

$$\clubsuit x + 2 = 0 \iff x = -2$$

$$\clubsuit x - 3 = 0 \iff x = 3$$

x	$-\infty$	-2	1	3	$+\infty$		
$x-1$	-	-	0	+	+		
$x+2$	-	0	+	+	+		
$x-3$	-	-	-	0	+		
$P(x)$	-	0	+	0	-	0	+

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) \geq 0$ est :

$$S = [-2, 1] \cup [3, +\infty[$$

b) On déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) : $6 - 2x \geq \sqrt{x}(5 - x)$

L'inéquation (I) est définie sur \mathbb{R}^+ .

Soit $x \in \mathbb{R}^+$. On a

$$\begin{aligned}
 (I) \quad & : \quad 6 - 2x \geq \sqrt{x}(5 - x) \\
 & \iff 6 - 2x \geq 5\sqrt{x} - x\sqrt{x} \\
 & \iff x\sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2x + 6 \geq 0 \\
 & \iff \sqrt{x^2} \times \sqrt{x} - 5\sqrt{x} - 2\sqrt{x^2} + 6 \geq 0 \\
 & \iff (\sqrt{x})^3 - 5\sqrt{x} - 2(\sqrt{x})^2 + 6 \geq 0 \\
 & \iff P(\sqrt{x}) \geq 0 \\
 & \iff \sqrt{x} \in [0, 1] \cup [3, +\infty[\\
 & \iff \sqrt{x} \in [0, 1] \text{ ou } \sqrt{x} \in [3, +\infty[\\
 & \iff 0 \leq \sqrt{x} \leq 1 \text{ ou } \sqrt{x} \geq 3 \\
 & \iff 0 \leq x \leq 1 \text{ ou } x \geq 9 \\
 & \iff x \in [0, 1] \text{ ou } x \in [9, +\infty[\\
 & \iff x \in [0, 1] \cup [9, +\infty[
 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S = [0, 1] \cup [9, +\infty[$$

Exercice 2 .

Soit le polynôme $P(x) = x^3 - 9x^2 + 11x + 21$.

1. Calculons $P(-1)$:

$$\text{On a } P(-1) = (-1)^3 - 9 \times (-1)^2 + 11 \times (-1) + 21 = 0.$$

2. En effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x + 1$ on obtient

$$P(x) = (x + 1)(x^2 - 10x + 21)$$

3. Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation $P(x) > 0$

On a $P(x) = (x + 1)(x^2 - 10x + 21)$ donc le signe de $P(x)$ dépend le signe des expressions : $(x + 1)$ et $(x^2 - 10x + 21)$.

♣ $x + 1 = 0 \iff x = -1.$

♣ Calculons le discriminant Δ du trinôme $x^2 - 10x + 21$:

On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-10)^2 - 4 \times 1 \times 21 = 16 > 0$$

donc le trinôme $x^2 - 10x + 21$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que :

$$x_1 = \frac{10 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + \sqrt{16}}{2 \times 1} = 7$$

d'où on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-1	3	7	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x^2-10x+21$	$+$	$+$	0	$-$	$+$
$P(x)$	$-$	0	$+$	0	$+$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) > 0$ est :

$$S =]-1, 3[\cup]7, +\infty[$$

Exercice 3 .

Soit le polynôme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24.$

1. a) Montrons que le polynôme $P(x)$ est divisible par $\left(x - \frac{3}{2}\right).$

On a $P\left(\frac{3}{2}\right) = 0$ donc $\frac{3}{2}$ est une racine du polynôme $P(x)$ d'où le polynôme $P(x)$ est divisible par $\left(x - \frac{3}{2}\right).$

b) On factorise le polynôme $P(x)$ sous la forme des polynômes de degré 1 :

Le polynôme $P(x)$ est divisible par $\left(x - \frac{3}{2}\right)$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right) Q(x)$$

On a $\deg(P(x)) = 3$ donc le degré du polynôme $Q(x)$ est 2 d'où $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} P(x) &= \left(x - \frac{3}{2}\right)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx - \frac{3ax^2}{2} - \frac{3bx}{2} - \frac{3c}{2} \\ &= ax^3 + x^2\left(b - \frac{3a}{2}\right) + x\left(c - \frac{3b}{2}\right) - \frac{3c}{2} \end{aligned}$$

et comme $P(x) = 2x^3 + x^2 - 22x + 24$ donc d'après l'égalité de deux polynômes on obtient

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - \frac{3a}{2} = 1 \\ c - \frac{3b}{2} = -22 \\ -\frac{3c}{2} = 24 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b - \frac{3 \times 2}{2} = 1 \\ c = -22 + \frac{3b}{2} \\ c = \frac{24}{-\frac{3}{2}} \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -22 + \frac{3 \times 4}{2} \\ c = -16 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 2 \\ b = 4 \\ c = -16 \end{cases}$$

donc $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(2x^2 + 4x - 16)$. On factorise le trinôme $2x^2 + 4x - 16$:

Calculons le discriminant Δ :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-16) = 144 > 0$$

donc le trinôme $2x^2 + 4x - 16$ admet deux racines réelles distinctes x_1 et x_2 telles que

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{144}}{2 \times 2} = -4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{144}}{2 \times 2} = 2$$

d'où : $2x^2 + 4x - 16 = 2(x - 2)(x + 4)$. Donc

$$P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)(x + 4)$$

2. Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation : $P(x) > 0$.

On a $P(x) = \left(x - \frac{3}{2}\right)(x - 2)(x + 4)$ donc le signe de $P(x)$ dépend le signe des binômes $\left(x - \frac{3}{2}\right)$, $(x - 2)$ et $(x + 4)$.

$$\clubsuit \quad x - \frac{3}{2} = 0 \iff x = \frac{3}{2}$$

$$\clubsuit \quad x - 2 = 0 \iff x = 2$$

♣ $x + 4 = 0 \iff x = -4$

donc on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-4	$\frac{3}{2}$	2	$+\infty$
$x - \frac{3}{2}$	-	-	0	+	+
$x - 2$	-	-	-	0	+
$x + 4$	-	0	+	+	+
$P(x)$	-	0	+	0	+

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation $P(x) > 0$ est :

$$S =]-4, \frac{3}{2}[\cup]2, +\infty[$$

3. Résolvons dans \mathbb{R} l'équation : (E) : $2|x|^3 + x^2 - 22|x| + 24 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

On sait que $x^2 = |x|^2$ donc l'équation (E) devient $2|x|^3 + |x|^2 - 22|x| + 24 = 0$ qui est équivalent à $P(|x|) = 0$. Donc

$$\begin{aligned} P(|x|) &= 0 \iff \left(|x| - \frac{3}{2}\right) (|x| - 2) (|x| + 4) = 0 \\ \iff |x| &= \frac{3}{2} \text{ ou } |x| = 2 \text{ ou } \underbrace{|x| = -4}_{\text{impossible}} \\ \iff |x| &= \frac{3}{2} \text{ ou } |x| = 2 \\ \iff x &= \frac{3}{2} \text{ ou } x = \frac{-3}{2} \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = -2 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \left\{-2, \frac{-3}{2}, \frac{3}{2}, 2\right\}$$

4. Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I) : $2|x|^3 + x^2 - 22|x| + 24 \geq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

On sait que $x^2 = |x|^2$ donc l'inéquation (I) devient $2|x|^3 + |x|^2 - 22|x| + 24 \geq 0$, qui est équivalent à $P(|x|) \geq 0$.

D'après la question 2/ on obtient

$$\begin{aligned}
 P(|x|) &\geq 0 \\
 \Leftrightarrow |x| &\in \left(\left[-4, \frac{3}{2} \right] \cup [2, +\infty[\right) \cap [0, +\infty[\\
 \Leftrightarrow |x| &\in \left[0, \frac{3}{2} \right] \cup [2, +\infty[\\
 \Leftrightarrow |x| &\in \left[0, \frac{3}{2} \right] \text{ ou } |x| \in [2, +\infty[\\
 \Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq \frac{3}{2} &\text{ ou } |x| \geq 2 \\
 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \frac{3}{2} &\text{ ou } -\frac{3}{2} \leq x \leq 0 \text{ ou } x \geq 2 \text{ ou } x \leq -2 \\
 \Leftrightarrow x \in \left[\frac{-3}{2}, 0 \right] \cup \left[0, \frac{3}{2} \right] \cup [2, +\infty[\cup]-\infty, -2] \\
 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cup [2, +\infty[
 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S =]-\infty, -2] \cup \left[\frac{-3}{2}, \frac{3}{2} \right] \cup [2, +\infty[$$

Exercice 4 .

On considère l'équation (E) : $x^3 - 15x^2 + 62x - 72 = 0$ $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrons que l'équation (E) est équivalente au système $\begin{cases} x = X + 5 \\ X \in \mathbb{R}, X^3 - 13X - 12 = 0 \end{cases}$

On pose $x = X + 5$ donc

$$\begin{aligned}
 (E) &\Leftrightarrow (X + 5)^3 - 15(X + 5)^2 + 62(X + 5) - 72 = 0 \\
 &\Leftrightarrow (X^3 + 15X^2 + 75X + 125) - 15(X^2 + 10X + 25) + 62X + 310 - 72 = 0 \\
 &\Leftrightarrow X^3 + 15X^2 + 75X + 125 - 15X^2 - 150X - 375 + 62X + 310 - 72 = 0 \\
 &\Leftrightarrow X^3 + 75X - 150X + 62X + 125 - 375 + 310 - 72 = 0 \\
 &\Leftrightarrow X^3 - 13X - 12 = 0
 \end{aligned}$$

donc l'équation (E) est équivalente au système $\begin{cases} x = X + 5 \\ X \in \mathbb{R}, X^3 - 13X - 12 = 0 \end{cases}$.

2. On cherche une solution évidente de l'équation : $X^3 - 13X - 12 = 0$

On a : $(-1)^3 - 13 \times (-1) - 12 = -1 + 13 - 12 = 0$. Donc -1 est une solution évidente de l'équation $X^3 - 13X - 12 = 0$.

3. On cherche les réels a, b et c tels que : $X^3 - 13X - 12 = (X + 1)(aX^2 + bX + c)$.

On écrit le polynôme $(X + 1)(aX^2 + bX + c)$ sous la forme réduite.

$$\begin{aligned}(X + 1)(aX^2 + bX + c) &= aX^3 + bX^2 + cX + aX^2 + bX + c \\ &= aX^3 + X^2(b + a) + X(c + b) + c\end{aligned}$$

et d'après l'égalité de deux polynômes on obtient

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 0 \\ c + b = -13 \\ c = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -13 - b \\ c = -12 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ c = -12 \end{cases}$$

donc : $X^3 - 13X - 12 = (X + 1)(X^2 - X - 12)$ pour tout $X \in \mathbb{R}$.

4. a) On résout dans \mathbb{R} l'équation : $X^3 - 13X - 12 = 0$.

Soit $X \in \mathbb{R}$.

$$X^3 - 13X - 12 = 0 \iff (X + 1)(X^2 - X - 12) = 0 \iff X = -1 \text{ ou } X^2 - X - 12 = 0$$

Calculons le discriminant Δ de l'équation $X^2 - X - 12 = 0$:

On a

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-12) = 49 > 0$$

donc l'équation $X^2 - X - 12 = 0$ admet deux solutions réelles distinctes X_1 et X_2 :

$$X_1 = \frac{1 + \sqrt{49}}{2 \times 1} = 4 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{1 - \sqrt{49}}{2 \times 1} = -3$$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation $X^3 - 13X - 12 = 0$ est

$$S = \{-3, -1, 4\}$$

b) On déduit l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

On a

$$X^3 - 13X - 12 = 0 \iff X = -3 \text{ ou } X = -1 \text{ ou } X = 4$$

donc d'après la question 1, on obtient

$$\begin{aligned}(E) \quad &: \quad x^3 - 15x^2 + 62x - 72 = 0 \\ &\iff \quad x = -1 + 5 \text{ ou } x = -3 + 5 \text{ ou } x = 4 + 5 \\ &\iff \quad x = 4 \text{ ou } x = 2 \text{ ou } x = 9\end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{2, 4, 9\}$$

Exercice 5 .

On considère le trinôme $T(x) = -4x^2 + 4x + 5$.

1. a) On cherche la forme canonique du trinôme $T(x)$:

On a

$$\begin{aligned} T(x) &= -4x^2 + 4x + 5 \\ &= -(4x^2 - 4x - 5) \\ &= -((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 - 5) \\ &= -((2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1 - 6) \\ &= -((2x - 1)^2 - 6) \\ &= -(2x - 1)^2 + 6 \end{aligned}$$

donc

$$T(x) = -(2x - 1)^2 + 6$$

b) Montrons que : $T(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$T(x) - 6 = -(2x - 1)^2 + 6 - 6 = -(2x - 1)^2$$

comme $(2x - 1)^2 \geq 0$ donc $T(x) \leq 6$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. a) On vérifie que le trinôme $T(x)$ admet deux racines distinctes α et β :

Calculons Δ :

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times (-4) \times 5 = 96 > 0$, donc le trinôme $T(x)$ admet deux racines réelles distinctes α et β .

b) Calculons $\alpha \times \beta$, $\alpha + \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$ et $\alpha^3 + \beta^3$:

Le trinôme $T(x)$ admet deux racines réelles distinctes α et β , donc

$$\clubsuit \alpha \times \beta = \frac{c}{a} = -\frac{5}{4}.$$

$$\clubsuit \alpha + \beta = \frac{-b}{a} = \frac{-4}{-4} = 1.$$

$$\clubsuit \text{ On a : } (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 \text{ ce qui entraîne que } \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 1 - 2 \times \left(\frac{-5}{4}\right) = \frac{7}{2}.$$

$$\clubsuit \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = 1 \times \left(\frac{7}{2} + \frac{5}{4}\right) = \frac{19}{4}.$$

3. a) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $T(x) = 0$.

L'équation $T(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes x_1 et x_2 (Le discriminant $\Delta > 0$)

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{1 - \sqrt{6}}{2} \text{ et } x_2 = \frac{-4 - \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{1 + \sqrt{6}}{2}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $T(x) = 0$ est

$$S = \left\{ \frac{1 - \sqrt{6}}{2}, \frac{1 + \sqrt{6}}{2} \right\}$$

b) On déduit l'ensemble des solutions de l'inéquation $T(x) \geq 0$:

Le discriminant du trinôme $T(x)$ est $96 > 0$. Et comme $a = -4 < 0$ donc

x	$-\infty$	$\frac{1-\sqrt{6}}{2}$	$\frac{1+\sqrt{6}}{2}$	$+\infty$	
$T(x)$	-	0	+	0	-

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $T(x) \geq 0$ est :

$$S = \left[\frac{1-\sqrt{6}}{2}, \frac{1+\sqrt{6}}{2} \right]$$

Exercice 6 .

1. a) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation (E) : $x^2 + 2x - 8 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (E) & : x^2 + 2x - 8 = 0 \\
 \iff & x^2 + 2x + 1 - 9 = 0 \\
 \iff & (x+1)^2 = 9 \\
 \iff & |x+1| = 3 \\
 \iff & x+1 = 3 \text{ ou } x+1 = -3 \\
 \iff & x = 2 \text{ ou } x = -4
 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est

$$S = \{-4, 2\}$$

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I) : $\frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} \leq \frac{3}{2}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I) :

$$\begin{aligned}
 D & = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 4 \neq 0\} \\
 & = \{x \in \mathbb{R} / (x-2)(x+2) \neq 0\} \\
 & = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 2 \text{ et } x \neq -2\} \\
 & = \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}.
 \end{aligned}$$

Soit $x \in D$.

$$\begin{aligned}
 \frac{2x^2 + x - 10}{x^2 - 4} & \leq \frac{3}{2} \\
 \iff & \frac{2(2x^2 + x - 10) - 3(x^2 - 4)}{2(x^2 - 4)} \leq 0 \\
 \iff & \frac{x^2 + 2x - 8}{2(x^2 - 4)} \leq 0 \\
 \iff & \frac{x^2 + 2x - 8}{x^2 - 4} \leq 0
 \end{aligned}$$

Le signe de $\frac{x^2 + 2x - 8}{2(x^2 - 4)}$ dépend le signe des trinômes $x^2 + 2x - 8$ et $x^2 - 4$.

Donc

x	$-\infty$	-4	-2	2	$+\infty$		
x^2+2x-8	+	0	-	-	0	+	
x^2-4	+		+	0	-	0	+
$\frac{x^2+2x-8}{x^2-4}$	+	0	-		+		+

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) est :

$$S = [-4, -2[$$

2. On considère le polynôme $P(x) = x^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2 - (2 + \sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$

a) On cherche $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x + 1)Q(x)$.

On a $P(-1) = 0$ donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x + 1)$ donc il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x) = (x + 1)Q(x)$$

On a $\deg(P(x)) = 3$ donc le degré du polynôme $Q(x)$ est 2 d'où $Q(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$, donc

$$\begin{aligned} P(x) &= (x + 1)(ax^2 + bx + c) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c \\ &= ax^3 + x^2(b + a) + x(c + b) + c \end{aligned}$$

et comme $P(x) = x^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2 - (2 + \sqrt{2})x - 2\sqrt{2}$ donc d'après l'égalité de

deux polynômes on obtient

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b + a = \sqrt{2} - 1 \\ c + b = -(2 + \sqrt{2}) \\ c = -2\sqrt{2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 1 - 1 \\ c = -2 - \sqrt{2} - b \\ c = -2\sqrt{2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 2 \\ c = -2 - \sqrt{2} - \sqrt{2} + 2 \\ c = -2\sqrt{2} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow & \left\{ \begin{array}{l} a = 1 \\ b = \sqrt{2} - 2 \\ c = -2\sqrt{2} \end{array} \right. \end{aligned}$$

donc $P(x) = (x + 1)(x^2 + (\sqrt{2} - 2)x - 2\sqrt{2})$.

b) Résolvons dans \mathbb{R} l'équation $P(x) = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} P(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow & (x + 1)(x^2 + (\sqrt{2} - 2)x - 2\sqrt{2}) = 0 \\ \Leftrightarrow & x = -1 \text{ ou } x^2 + (\sqrt{2} - 2)x - 2\sqrt{2} = 0 \quad / \Delta = (\sqrt{2} + 2)^2 \\ \Leftrightarrow & x = -1 \text{ ou } x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = 2 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation $P(x) = 0$ est

$$S = \{-\sqrt{2}, -1, 2\}$$

c) Résolvons dans \mathbb{R} l'inéquation (I) : $|x|^3 + (\sqrt{2} - 1)x^2 - (2 + \sqrt{2})|x| - 2\sqrt{2} < 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$

On sait que $x^2 = |x|^2$ donc l'inéquation (I) devient $|x|^3 + (\sqrt{2} - 1)|x|^2 - (2 + \sqrt{2})|x| - 2\sqrt{2} < 0$ qui est équivalent à $P(|x|) < 0$.

On pose $X = |x|$ avec $X \in \mathbb{R}^+$ on obtient $P(X) < 0$.

donc

x	0	2	$+\infty$
$X+1$	+		+
$Q(X)$	-	0	+
$P(X)$	-	0	+

d'où

$$\begin{aligned} P(X) &< 0 \\ \iff X &\in [0, 2[\\ \iff |x| &\in [0, 2[\\ \iff 0 \leq |x| &< 2 \\ \iff 0 \leq x < 2 \text{ ou } -2 < x \leq 0 \\ \iff x &\in]-2, 0] \cup [0, 2[\\ \iff x &\in]-2, 2[\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$S =]-2, 2[$$

Exercice 7 .

On considère l'équation (E) : $x^2 - 6x - 3 = 0$.

1. On pose $a = 1 - \sqrt{3}$ et $b = \frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{3}}$.

♣ Montrons que : $\frac{a}{b} = 3 - 2\sqrt{3}$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{a}{b} &= \frac{1 - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})}{1 + \sqrt{3}} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 - \sqrt{3})^2}{1 - \sqrt{3}^2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(1 - 2\sqrt{3} + 3)}{-2} \\ &= \frac{\sqrt{3}(4 - 2\sqrt{3})}{-2} \\ &= -\sqrt{3}(2 - \sqrt{3}) \\ &= 3 - 2\sqrt{3}\end{aligned}$$

♣ Montrons que : $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$.

On a $\frac{a}{b} = 3 - 2\sqrt{3}$ donc

$$\begin{aligned}\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 &= (3 - 2\sqrt{3})^2 - 6(3 - 2\sqrt{3}) - 3 \\ &= (9 - 12\sqrt{3} + 12) - 18 + 12\sqrt{3} - 3 \\ &= 0\end{aligned}$$

2. On déduit l'ensemble des solutions de l'équation (E) :

On a $\left(\frac{a}{b}\right)^2 - 6\left(\frac{a}{b}\right) - 3 = 0$ ceci signifie que $\frac{a}{b}$ est solution de l'équation (E). On cherche la 2^{ème} solution.

On a

$$\left(\frac{a}{b}\right) \times x_2 = \frac{c}{a} \iff \left(\frac{a}{b}\right) \times x_2 = -3 \iff x_2 = \frac{-3}{3 - 2\sqrt{3}} = \frac{-3(3 + 2\sqrt{3})}{-3} = 3 + 2\sqrt{3}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) est :

$$S = \{3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3}\}$$

FIN

Pr : Yahya MATIOUI

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)