Correction de la série

Exercice 1 .

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_1) : \sqrt{3}(x+2) = 1-\sqrt{2}x$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl}
\sqrt{3}(x+2) & = & 1-\sqrt{2}x \\
& \Longleftrightarrow & \sqrt{3}x + 2\sqrt{3} = 1-\sqrt{2}x \\
& \Longleftrightarrow & \sqrt{3}x + \sqrt{2}x = 1-2\sqrt{3} \\
& \Longleftrightarrow & x\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right) = 1-2\sqrt{3} \\
& \Longleftrightarrow & x = \dfrac{1-2\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = \dfrac{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)} = \left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)
\end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est :*

$$S = \left\{\left(1-2\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\right\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_2) : \dfrac{x-1}{x+2} = \dfrac{x-5}{x-2}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_2).

$$\begin{array}{rcl}
D_{(E_2)} & = & \{x \in \mathbb{R} /\ x+2 \neq 0 \ \ et\ x-2 \neq 0\} \\
& = & \{x \in \mathbb{R} /\ x \neq -2 \ \ et\ x \neq 2\} \\
& = & \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}
\end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{x-1}{x+2} & = & \dfrac{x-5}{x-2} \\
& \Longleftrightarrow & \dfrac{x-1}{x+2} - \dfrac{x-5}{x-2} = 0 \\
& \Longleftrightarrow & \dfrac{(x-1)(x-2)-(x-5)(x+2)}{(x+2)(x-2)} = 0 \\
& \Longleftrightarrow & (x-1)(x-2)-(x-5)(x+2) = 0 \\
& \Longleftrightarrow & 12 = 0 \qquad (impossible)
\end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) *est*

$$S = \varnothing$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_3) : |x-1| = |x+3|$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} |x-1| & = & |x+3| \\ & \Longleftrightarrow & x-1 = x+3 \;\; ou \; x-1 = -(x+3) \\ & \Longleftrightarrow & x-x = 3+1 \; ou \; x-1 = -x-3 \\ & \Longleftrightarrow & \underbrace{-1=4}_{\mathrm{Im}\,possible} \; ou \; 2x = -2 \\ & \Longleftrightarrow & x = -1 \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_3) *est*

$$S = \{-1\}$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_4) : |-x+7| - 2 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} |-x+7| - 2 & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & |-x+7| = 2 \\ & \Longleftrightarrow & -x+7 = 2 \;\; ou \;\; -x+7 = -2 \\ & \Longleftrightarrow & -x = 2-7 \;\; ou \;\; -x = -2-7 \\ & \Longleftrightarrow & x = 5 \;\; ou \; x = 9 \end{array}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) *est*

$$S = \{5, 9\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_5) : \dfrac{(x-1)(2+x)}{x^2-1} = 0$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_5).

$$\begin{array}{rcl} D_{(E_2)} & = & \left\{x \in \mathbb{R}/ \; x^2 - 1 \neq 0 \;\right\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/ \;\; (x-1)(x+1) \neq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/ \; x-1 \neq 0 \;\; et \; x+1 \neq 0\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R}/ \; x \neq 1 \;\; ou \; x \neq -1\} \\ & = & \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{(x-1)(2+x)}{x^2-1} & = & 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x-1)(2+x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & (x-1) = 0 \;\; ou \;\; (2+x) = 0 \\ & \Longleftrightarrow & x = 1 \;\; ou \; x = -2 \end{array}$$

comme $1 \notin \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ *alors l'ensemble des solutions de l'équation* (E_5) *est*

$$S = \{-2\}$$

♣ *On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation* $(E_6) : m^3x + 1 = 3 + x$

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$m^3x + 1 = 3 + x \iff x\left(m^3 - 1\right) = 3 - 1 \iff x\left(m - 1\right)\left(m^2 + m + 1\right) = 2$$

Résolvons l'équation : $(E') : (m - 1)(m^2 + m + 1) = 0$

$(m - 1)\left(m^2 + m + 1\right) = 0 \iff m - 1 = 0$ *ou* $m^2 + m + 1 = 0 \iff m = 1$ *ou* $m^2 + m + 1 = 0$

comme $\Delta = -3 < 0$ *alors l'équation* $m^2 + m + 1 = 0$ *n'admet aucune solution réelle* $(\forall m \in \mathbb{R},\ m^2 + m + 1 \neq 0)$.. *Donc l'équation* (E') *admet unique solution* 1.

■ Si $m = 1$ *alors l'équation* (E_6) *devient* $0 = 2$. *Donc l'équation* (E_6) *n'admet aucune solution, d'où* $S = \varnothing$.

■ Si $m \neq 1$ *alors l'équation* (E_6) *admet unique solution* $\dfrac{2}{(m - 1)(m^2 + m + 1)}$. *Donc* $S = \left\{\dfrac{2}{(m - 1)(m^2 + m + 1)}\right\}$.

♣ *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation* : $(E_7) : (x + 2)\dfrac{(2x - 1)}{3}(x - 2)^2 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
(x + 2)\frac{(2x - 1)}{3}(x - 2)^2 &= 0\\
&\iff (x + 2)(2x - 1)(x - 2)^2 = 0\\
&\iff x + 2 = 0 \text{ ou } 2x - 1 = 0 \text{ ou } (x - 2)^2 = 0\\
&\iff x = -2 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = 2
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_7) *est*

$$S = \left\{-2, \frac{1}{2}, 2\right\}$$

♣ *Résolvons dans $\mathbb{R}$ l'équation* : $(E_8) : x^3 + 27 = 3x(x + 3)$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
x^3 + 27 &= 3x(x + 3)\\
&\iff (x + 3)\left(x^2 - 3x + 9\right) = 3x(x + 3)\\
&\iff (x + 3)\left(x^2 - 3x + 9\right) - 3x(x + 3) = 0\\
&\iff (x + 3)\left[\left(x^2 - 3x + 9\right) - 3x\right] = 0\\
&\iff (x + 3)\left(x^2 - 3x + 9 - 3x\right) = 0\\
&\iff (x + 3)\left(x^2 - 6x + 9\right) = 0\\
&\iff x + 3 = 0 \text{ ou } x^2 - 6x + 9 = 0\\
&\iff x = -3 \text{ ou } (x - 3)^2 = 0\\
&\iff x = -3 \text{ ou } x = 3
\end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_8) *est*

$$S = \{-3, 3\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation :* (E_9) : $\dfrac{2x-1}{x-m} = m.$

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_9) :

$$\begin{aligned} D_{(E_9)} &= \{x \in \mathbb{R}/\ x - m \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ x \neq m\} \\ &= \mathbb{R}\backslash \{m\} \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R}\backslash \{m\}$

$$\begin{aligned} \frac{2x-1}{x-m} &= m \\ &\iff 2x - 1 = m(x-m) \\ &\iff 2x - 1 = mx - m^2 \\ &\iff 2x - mx = 1 - m^2 \\ &\iff x(2-m) = 1 - m^2 \end{aligned}$$

- Si $m = 2$ *alors l'équation devient* $0 = -3$ *ce qui signifie que l'équation* (E_9) *n'admet aucune solution réelle. Donc* $S = \varnothing$.
- Si $m \neq 2$ *alors l'équation* (E_9) *admet unique solution* $\dfrac{1-m^2}{2-m}$. *Donc* $S = \left\{\dfrac{1-m^2}{2-m}\right\}$.

Exercice 2 .

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* (I_1) : $\dfrac{-1}{2}(1-2x) \leq x + \dfrac{1}{3}.$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-1}{2}(1-2x) \leq x + \frac{1}{3} \iff \frac{-1}{2} + x \leq x + \frac{1}{3} \iff 0 \leq \frac{5}{6}$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) *est*

$$S = \mathbb{R}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* (I_2) : $\dfrac{x}{2x+1} \leq \dfrac{1}{3}.$

On cherche l'ensemble de définiton de l'inéquation (I_2) :

$$\begin{aligned} D_{(I_2)} &= \{x \in \mathbb{R}/\ 2x + 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}/\ 2x \neq -1\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq \frac{-1}{2}\right\} = \mathbb{R}\backslash \left\{\frac{-1}{2}\right\}. \end{aligned}$$

Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{ \dfrac{-1}{2} \right\}$.

$$\frac{x}{2x+1} \leq \frac{1}{3} \iff \frac{x}{2x+1} - \frac{1}{3} \leq 0 \iff \frac{3x-2x-1}{3\,(2x+1)} \leq 0 \iff \frac{x-1}{3\,(2x+1)} \leq 0$$

Le signe de $\dfrac{x-1}{3\,(2x+1)}$ *dépend du signe des expressions :* $x-1$ *et* $3\,(2x+1)$.

■ $x-1=0 \iff x=1$

■ $3\,(2x+1)=0 \iff 2x+1=0 \iff x=\dfrac{-1}{2}$

donc

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$3(2x+1)$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{3(2x+1)}$		$+$	$\Vert$	$-$	0	$+$	

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) *est*

$$S = \left] \frac{-1}{2}, 1 \right]$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* (I_3) : $(2x-1)\left(2-\dfrac{1}{4}x\right) < 0$.

On résout dans $\mathbb{R}$ *les équations :* $2x-1=0$ *et* $2-\dfrac{1}{4}x=0$:

■ $2x-1=0 \iff x=\dfrac{1}{2}$

■ $2-\dfrac{1}{4}x=0 \iff \dfrac{1}{4}x=2 \iff x=8$

donc

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		8		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-\frac{1}{4}x$		$+$		$+$	0	$-$	
$(2x-1)(2-\frac{1}{4}x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) *est*

$$S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[\cup \left]8, +\infty\right[$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $(I_4) : x^3 + 2x^2 \leq -x$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^3 + 2x^2 \leq -x \iff x\left(x^2 + 2x + 1\right) \leq 0 \iff x\,(x+1)^2 \leq 0$$

donc

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+1)^2$		$+$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)^2$		$-$	0	$-$	0	$+$	

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation est

$$S = \left]-\infty, -1\right] \cup \left[-1, 0\right] = \left]-\infty, 0\right]$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $(I_5) : \dfrac{x+3}{3x-5} < \dfrac{3x-5}{x+3}$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_5) *:*

$$\begin{aligned}
D_{(I_5)} &= \{x \in \mathbb{R} /\ 3x - 5 \neq 0 \ \textit{et}\ x + 3 \neq 0\} \\
&= \left\{x \in \mathbb{R} /\ x \neq \frac{5}{3} \ \textit{et}\ x \neq -3\right\} \\
&= \mathbb{R} \setminus \left\{-3, \frac{5}{3}\right\}
\end{aligned}$$

Soit $x \in D_{(I_5)}$.

$$\begin{aligned}
\frac{x+3}{3x-5} &< \frac{3x-5}{x+3} \\
&\iff \frac{x+3}{3x-5} - \frac{3x-5}{x+3} < 0 \\
&\iff \frac{(x+3)^2 - (3x-5)^2}{(3x-5)(x+3)} < 0 \\
&\iff \frac{[(x+3) - (3x-5)]\,[(x+3) + (3x-5)]}{(3x-5)(x+3)} < 0 \\
&\iff \frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)} < 0
\end{aligned}$$

Le signe de $\dfrac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)}$ *dépend du signe des expressions :* $-2x+8$, $4x-2$, $3x-5$ *et* $x+3$.

- $-2x+8=0 \iff x=4$
- $4x-2=0 \iff x=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$
- $3x-5=0 \iff x=\dfrac{5}{3}$
- $x+3=0 \iff x=-3$

  alors

x	$-\infty$	-3		$\frac{1}{2}$		$\frac{5}{3}$		4		$+\infty$
$-2x+8$	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	
$4x-2$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	
$3x-5$	$-$	|	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	
$x+3$	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	|	$+$	
$\frac{(-2x+8)(4x-2)}{(3x-5)(x+3)}$	$-$	||	$+$	0	$-$	||	$+$	0	$-$	

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) *est* :

$$S=]-\infty,-3[\cup\left]\frac{1}{2},\frac{5}{3}\right[\cup]4,+\infty[$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* : (I_5) : $\dfrac{(x-1)^2}{x}\leq 0.$

l'inéquation est définie sur $\mathbb{R}^*$.

On a

x	$-\infty$	0		1		$+\infty$
x	$-$	0	$+$	|	$+$	
$(x-1)^2$	$+$	|	$+$	0	$+$	
$\frac{(x-1)^2}{x}$	$-$	||	$+$	0	$+$	

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) *est* :

$$S=]-\infty,0[\cup\{1\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* : $(I_7) : m\,(mx-1) < x\,(1-m)$ *où* $m \in \mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} m\,(mx-1) &< x\,(1-m) \\ &\Longleftrightarrow m^2x - m < x - mx \\ &\Longleftrightarrow m^2x + mx - x < m \\ &\Longleftrightarrow x\left(m^2+m-1\right) < m \end{aligned}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $m^2+m-1=0$

On a $\Delta = 1-4\times1\times(-1) = 5 > 0$. *Donc l'équation admet* 2 *solutions réelles distinctes* m_1 *et* m_2 *telles que* :

$$m_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \quad et \quad m_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

Comme $a = 1 > 0$, *on déduit le tableau de signe suivant*

m	$-\infty$		$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$		$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$		$+\infty$
m^2+m-1		$+$	0	$-$	0	$+$	

■ Si $m \in \left]-\infty, \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right[\cup \left]\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, +\infty\right[$, *alors* $m^2+m-1 > 0$ *donc l'ensemble des solutions de l'inéquation* (I_7) *est* :

$$S = \left]-\infty, \frac{m}{m^2+m-1}\right[$$

■ Si $m \in \left]\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right[$, *alors* $m^2+m-1 < 0$ *donc l'ensemble des solutions de l'inéquation* (I_7) *est* :

$$S = \left]\frac{m}{m^2+m-1}, +\infty\right[$$

■ Si $m = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, *alors l'inéquation devient* $0 < \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$ (*impossible*). *donc l'inéquation* (I_7) *n'admet aucune solution. Donc*

$$S = \varnothing$$

■ Si $m = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, *alors l'inéquation devient* $0 < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$.
Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_7) *est* :

$$S = \mathbb{R}$$

Exercice 3 *.*

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *le système* $\begin{cases} 5\,(2-x) \leq -7x+6 \\ \\ 3x+7 \leq 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \begin{cases} 5\,(2-x) \leq -7x+6 \\ \\ 3x+7 \leq 4\left(x+\dfrac{1}{2}\right) \end{cases} &\iff \begin{cases} 10-5x \leq -7x+6 \\ \\ 3x+7 \leq 4x+2 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} -5x+7x \leq 6-10 \\ \\ 3x-4x \leq 2-7 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} 2x \leq -4 \\ \\ -x \leq -5 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x \leq -2 \\ \\ x \geq 5 \end{cases} \\ &\iff x \leq -2 \quad et\ x \geq 5 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left]-\infty, -2\right] \cap \left[5, +\infty\right[= \varnothing$$

♣ *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 3x-2 \quad < \quad & 1-2x \leq x+3 \\ \iff\ & 3x-2 < 1-2x \quad et\ 1-2x \leq x+3 \\ \iff\ & 3x+2x < 1+2 \quad et\ -2x-x \leq 3-1 \\ \iff\ & 5x < 3 \quad et\ \ -3x \leq 2 \\ \iff\ & x < \frac{3}{5} \quad et\ x \geq -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left]-\infty, \frac{3}{5}\right[\cap \left[\frac{-2}{3}, +\infty\right[= \left[\frac{-2}{3}, \frac{3}{5}\right[$$

Exercice 4 *.*

On cherche la forme canonique

♣

$$\begin{aligned} P(x) &= x^2 - 4x + 5 \\ &= x^2 - 2 \times 2x + 2^2 - 2^2 + 5 \\ &= (x-2)^2 - 4 + 5 \\ &= (x-2)^2 + 1 \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^2 + 8x + 1 \\ &= x^2 + 2 \times 4x + 4^2 - 4^2 + 1 \\ &= (x+4)^2 - 16 + 1 \\ &= (x+4)^2 - 15 \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned} R(x) &= x^2 - 6x - 7 \\ &= x^2 - 2 \times 3x + 3^2 - 3^2 - 7 \\ &= (x-3)^2 - 9 - 7 \\ &= (x-3)^2 - 16 \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned} F(x) &= x^2 - 7x + 3 \\ &= x^2 - 2 \times \frac{7}{2}x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2 + 3 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4} + 3 \\ &= \left(x - \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{37}{4} \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned} A(x) &= x^2 - x + 5 \\ &= x^2 - 2 \times \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 5 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 5 \\ &= \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{19}{4} \end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned} B(x) &= x^2+5x-\frac{1}{2} \\ &= x^2+2\times\frac{5}{2}x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{1}{2} \\ &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}-\frac{1}{2} \\ &= \left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{27}{4} \end{aligned}$$

Exercice 5 .

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_1): 3-2|x-4|=2x+5$.

Le tableau de signe de $x-4$.

x	$-\infty$		4		$+\infty$
$x-4$		$-$	0	$+$	

■ Si $x\in\left]-\infty,4\right]$, *alors* $|x-4|=-(x-4)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3-2(-(x-4))=2x+5 \\ &\iff 3+2(x-4)=2x+5 \\ &\iff 2x-2x=5-3+8 \\ &\iff 0=10 \quad (\textit{impossible}) \end{aligned}$$

donc

$$S_1=\varnothing$$

■ Si $x\in\left[4,+\infty\right[$, *alors* $|x-4|=x-4$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3-2(x-4)=2x+5 \\ &\iff 3-2x+8=2x+5 \\ &\iff -4x=5-11 \\ &\iff x=\frac{3}{2} \end{aligned}$$

et comme $\frac{3}{2}\notin\left[4,+\infty\right[$, *donc*

$$S_2=\varnothing$$

D'où l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est* :

$$S=S_1\cup S_2=\varnothing$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_2) : |2x^2 - x - 6| - |x+1| - 1 = 0$.

1. *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

   On résout d'abord les équations : $2x^2 - x - 6 = 0$ *et* $x + 1 = 0$.

   ♠ *Les solutions de l'équation* $2x^2 - x - 6 = 0$ *dans* $\mathbb{R}$ *sont :* 2 *et* $\dfrac{-3}{2}$.

   ♠ *L'équation* $x + 1 = 0$ *admet unique solution* -1.

   Donc

x	$-\infty$	$\frac{-3}{2}$		-1		2		$+\infty$
$2x2-x-6$	$+$	0	$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$	$-$	|	$-$	0	$+$	|	$+$	

♣ Si $x \in \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ *et* $|x+1| = -(x+1)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff \left(2x^2 - x - 6\right) + (x+1) - 1 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 6 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 6 = 0 \\ &\iff x^2 = 3 \\ &\iff x = \sqrt{3} \quad ou \quad x = -\sqrt{3} \end{aligned}$$

comme $-\sqrt{3} \notin \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$ *et* $\sqrt{3} \notin \left]-\infty, \dfrac{-3}{2}\right]$ *donc*

$$S_1 = \varnothing$$

♣ Si $x \in \left[\dfrac{-3}{2}, -1\right]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ *et* $|x+1| = -(x+1)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff -\left(2x^2 - x - 6\right) + (x+1) - 1 = 0 \\ &\iff -2x^2 + 2x + 6 = 0 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$. *Comme* $x_1 \notin \left[\dfrac{-3}{2}, -1\right]$. *Donc*

$$S_2 = \left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right\}$$

♣ Si $x \in [-1,2]$, *alors* $|2x^2 - x - 6| = -(2x^2 - x - 6)$ *et* $|x+1| = (x+1)$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff -\left(2x^2 - x - 6\right) - (x+1) - 1 = 0 \\ &\iff 4 - 2x^2 = 0 \\ &\iff x = \sqrt{2} \quad ou \; x = -\sqrt{2} \end{aligned}$$

Donc

$$S_3 = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

♣ Si $x \in [2, +\infty[$ *alors* $|2x^2 - x - 6| = 2x^2 - x - 6$ *et* $|x+1| = x+1$ *donc*

$$\begin{aligned} (E) &\iff \left(2x^2 - x - 6\right) - (x+1) - 1 = 0 \\ &\iff 2x^2 - 2x - 8 = 0 \end{aligned}$$

L'équation admet deux solutions distinctes $x_1 = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$ *et* $x_2 = \dfrac{1-\sqrt{17}}{2}$. *Comme* $x_2 \notin [2, +\infty[$. *Donc*

$$S_4 = \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$$

Donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$\begin{aligned} S &= S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \\ &= \left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, \frac{1-\sqrt{13}}{2}, -3\right\} \end{aligned}$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_3) : \sqrt{3x+4} = x$.

On cherche l'ensemble de définition de l'équation (E_3).

$$\begin{aligned} D_{(E)} &= \{x \in \mathbb{R} / \; 3x + 4 \geq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / \; 3x \geq -4\} \\ &= \left\{x \in \mathbb{R} / \; x \geq \frac{-4}{3}\right\} \\ &= \left[\frac{-4}{3}, +\infty\right[\end{aligned}$$

Soit $x \in \left[\dfrac{-4}{3}, +\infty\right[$

$$\begin{aligned} \sqrt{3x+4} &= x \\ &\iff 3x + 4 = x^2 \quad, \; et \quad x \geq 0 \\ &\iff -x^2 + 3x + 4 = 0 \;, \; et \quad x \geq 0 \end{aligned}$$

comme $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times (-1) \times 4 = 25 > 0$ *donc l'équation* $-x^2 + 3x + 4 = 0$ *admet* 2 *solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 :

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = -1 \quad et \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - \sqrt{25}}{2 \times (-1)} = 4$$

puisque $-1 < 0$ *et* $4 > 0$. *Donc l'ensemble des solutions de l'équation* (E_3) *est :*

$$S = \{4\}$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_4) : 2x^4 - x^2 - 6 = 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$2x^4 - x^2 - 6 = 0 \iff 2\left(x^2\right)^2 - x^2 - 6 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = x^2$ *avec* $X \in \mathbb{R}^+$, *l'équation* (1) *devient* $(E') : 2X^2 - X - 6 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-1)^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 49 > 0$, *donc l'équation* (E') *admet* 2 *solutions réelles distinctes :*

$$\begin{aligned} X_1 \quad &= \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 + \sqrt{49}}{2 \times 2} = 2 \quad et \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{1 - \sqrt{49}}{2 \times 2} = -\frac{3}{2} \\ &\iff \quad X_1 = 2 \;\; et \;\; X_2 = \frac{-3}{2} \\ &\iff \quad x_1^2 = 2 \; et \; x_2^2 = \frac{-3}{2} \end{aligned}$$

L'équation $x_2^2 = \dfrac{-3}{2}$ *est impossible.Et on a*

$$x_1^2 = 2 \iff |x_1| = \sqrt{2} \iff x_1 = \sqrt{2} \text{ ou } x_1 = -\sqrt{2}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_4) *est :*

$$S = \left\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\right\}$$

♣ *On résout l'équation* $(E_5) : x^2 + |x| - 2 = 0$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$x^2 + |x| - 2 = 0 \iff |x|^2 + |x| - 2 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = |x|$ *avec* $X \in \mathbb{R}^+$, *l'équation* (1) *devient* $(E') : X^2 + X - 2 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 9 > 0$, *donc l'équation* (E') *admet* 2 *solutions réelles distinctes :*

$$\begin{aligned} X_1 \quad &= \quad \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = 1 \quad et \quad X_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-1 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -2 \\ &\iff \quad X_1 = 1 \;\; et \;\; X_2 = -2 \\ &\iff \quad |x_1| = 1 \; et \; |x_2| = -2 \end{aligned}$$

L'équation $|x_2| = -2$ *est impossible. Et on a*

$$|x_1| = 1 \iff x_1 = 1 \text{ ou } x_1 = -1$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_5) *est :*

$$S = \{-1, 1\}$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_6) : x - 3\sqrt{x} + 2 = 0$.

L'équation (E_6) *est définie sur* $\mathbb{R}^+$.

Soit $x \in \mathbb{R}^+$

$$x - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \iff \left(\sqrt{x}\right)^2 - 3\sqrt{x} + 2 = 0 \quad (1)$$

On pose $X = \sqrt{x}$ *avec* $X \in \mathbb{R}^+$, *l'équation* (1) *devient* $(E') : X^2 - 3X + 2 = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$, *donc l'équation* (E') *admet* 2 *solutions réelles distinctes :*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1 \\ \iff & X_1 = 2 \quad \text{et} \quad X_2 = 1 \\ \iff & \sqrt{x_1} = 2 \text{ et } \sqrt{x_2} = 1 \\ \iff & x_1 = 4 \text{ et } x_2 = 1 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) *est :*

$$S = \{1, 4\}$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E_7) : \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x} + \dfrac{3}{25} = 0$.

L'ensemble de définition de l'équation (E_7) *est* $\mathbb{R}^*$.

Soit $x \in \mathbb{R}^*$

$$\frac{3}{x^2} - \frac{2}{x} + \frac{3}{25} = 0 \iff 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{x} + \frac{3}{25} = 0 \quad (1)$$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$, *l'équation* (1) *devient* $(E') : 3X^2 - 2X + \dfrac{3}{25} = 0$.

On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 3 \times \dfrac{3}{25} = \dfrac{64}{25} > 0$, *donc l'équation* (E') *admet* 2 *solutions réelles distinctes :*

$$\begin{aligned} X_1 &= \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2+\sqrt{\frac{64}{25}}}{2\times 3} = \frac{3}{5} \quad \text{et} \quad X_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2-\sqrt{\frac{64}{25}}}{2\times 3} = \frac{1}{15} \\ \iff & X_1 = \frac{3}{5} \text{ et } X_2 = \frac{1}{15} \\ \iff & \frac{1}{x_1} = \frac{3}{5} \text{ et } \frac{1}{x_2} = \frac{1}{15} \\ \iff & x_1 = \frac{5}{3} \text{ et } x_2 = 15 \end{aligned}$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_6) *est :*

$$S = \left\{\frac{5}{3}, 15\right\}$$

Exercice 6 .

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I_1) : 2x + 1 - |4x - 3| < 2x - 4$.

Le tableau de signe de l'expression : $4x - 3$

x	$-\infty$		$\frac{3}{4}$		$+\infty$
$4x-3$		$-$	0	$+$	

■ Si $x \in \left]-\infty, \frac{3}{4}\right]$ *alors* $4x-3 \leq 0$ *c'est-à-dire* $|4x - 3| = -(4x - 3)$ *donc l'inéquation devient*

$$2x+1+(4x-3) < 2x-4 \iff 2x+4x-2x < -4-1+3 \iff 4x < -2 \iff x < -\frac{1}{2}$$

donc

$$S_1 = \left]-\infty, \frac{3}{4}\right] \cap \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[= \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[$$

■ Si $x \in \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[$ *alors* $4x - 3 \geq 0$ *c'est-à-dire* $|4x - 3| = 4x - 3$ *donc l'inéquation devient*

$$2x+1-(4x-3) < 2x-4 \iff 2x-4x-2x < -4-1-3 \iff -4x < -8 \iff x > 2$$

donc

$$S_1 = \left[\frac{3}{4}, +\infty\right[\cap]2, +\infty[=]2, +\infty[$$

d'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_1) *est :*

$$S = S_1 \cup S_2 = \left]-\infty, \frac{-1}{2}\right[\cup]2, +\infty[$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $(I_2) : |x^2 + 3x + 2| + |x^2 - 3x + 2| < 12$.

Étudions le signe des trinômes suivants : $x^2 + 3x + 2$ *et* $x^2 - 3x + 2$ *:*

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 9 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$ *donc le trinôme* $x^2 + 3x + 2$ *admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 + \sqrt{1}}{2} = -1 \quad \textit{et} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-3 - 1}{2} = -2$$

De même on a $\Delta = b^2 - 4ac = 1 > 0$ *donc le trinôme* $x^2 - 3x + 2$ *admet deux racines réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3+\sqrt{1}}{2} = 2 \quad et \quad x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{3-1-}{2} = 1$$

donc on obtient le tableau de signe suivant

x	$-\infty$	-2		-1		1		2		$+\infty$
$x2-3x+2$	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$x2+3x+2$	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	|	$+$	

■ Si $x \in]-\infty, -2]$ *alors* $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ *et* $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ *l'inéquation* (I_2) *devient*

$$x^2+3x+2+x^2-3x+2 < 12 \iff 2x^2+4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_1 =]-2, 2[\cap]-\infty, -2] = \varnothing$$

■ Si $x \in [-2, -1]$ *alors* $|x^2 + 3x + 2| = -(x^2 + 3x + 2)$ *et* $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ *l'inéquation* (I_2) *devient*

$$-\left(x^2 + 3x + 2\right) + x^2 - 3x + 2 < 12 \iff -6x < 12 \iff x > -2$$

donc

$$S_2 = [-2, -1] \cap]-2, +\infty[=]-2, -1[$$

■ Si $x \in [-1, 1]$ *alors* $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ *et* $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ *l'inéquation* (I_2) *devient*

$$x^2+3x+2+x^2-3x+2 < 12 \iff 2x^2+4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_3 = [-1, 1] \cap]-2, 2[= [-1, 1]$$

■ Si $x \in [1, 2]$ *alors* $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ *et* $|x^2 - 3x + 2| = -(x^2 - 3x + 2)$ *l'inéquation* (I_2) *devient*

$$x^2 + 3x + 2 - \left(x^2 - 3x + 2\right) < 12 \iff 6x < 12 \iff x < 2$$

donc

$$S_4 = [1, 2] \cap]-\infty, 2[= [1, 2[$$

■ Si $x \in [2, +\infty[$ *alors* $|x^2 + 3x + 2| = x^2 + 3x + 2$ *et* $|x^2 - 3x + 2| = x^2 - 3x + 2$ *l'inéquation* (I_2) *devient*

$$x^2+3x+2+x^2-3x+2 < 12 \iff 2x^2+4 < 12 \iff x^2 < 4 \iff |x| < 2 \iff -2 < x < 2$$

donc

$$S_5 =]-2, 2[\cap [2, +\infty[= \varnothing$$

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_2) *est :*

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4 \cup S_5 =]-2, 2[$$

♣ *On résout dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* (I_3) : $\sqrt{x-1} \geq x - 7$.

On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation (I_3).

$$\begin{aligned} D_{(I)} &= \{x \in \mathbb{R} / \ \ x - 1 \geq 0\} \\ &= [1, +\infty[. \end{aligned}$$

Le tableau de signe de l'expression $x - 7$:

x	$-\infty$		7		$+\infty$
$x-7$		$-$	0	$+$	

1. ♣ Si $x \in [1, 7[$, *alors* $x - 7 < 0$ *donc* $\sqrt{x-1} \geq x - 7$ *est vraie pour tout* $x \in [1, 7[$.
   D'où
   $$S_1 = [1, 7[$$

   ♣ Si $x \in [7, +\infty[$, *alors* $x - 7 \geq 0$.
   Donc

$$\begin{aligned} \sqrt{x-1} &\geq x - 7 \\ &\Longleftrightarrow (x-1) \geq (x-7)^2 \\ &\Longleftrightarrow (x-1) - \left(x^2 - 14x + 49\right) \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow -x^2 + 15x - 50 \geq 0 \\ &\Longleftrightarrow x \in [5, 10]. \end{aligned}$$

   d'où
   $$S_2 = [5, 10] \cap [7, +\infty[= [7, 10].$$

   Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_3) *est :*

$$S = S_1 \cup S_2 = [1, 10]$$

♣ *Réslvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* (I_4) : $\dfrac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8} \leq 0$.

On cherche l'ensemble de définiton de l'inéquation (I_4) :

$$D = \left\{x \in \mathbb{R} / \ 3x^2 + 10x - 8 \neq 0\right\}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $3x^2 + 10x - 8 = 0$:

On a $\Delta = b^2 - 4ac = 100 - 4 \times 3 \times (-8) = 196 > 0$. *Donc l'équation* $3x^2 + 10x - 8 = 0$ *admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 - \sqrt{196}}{6} = -4 \quad et \quad x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-10 + \sqrt{196}}{6} = \frac{2}{3}$$

donc

$$\begin{aligned} D &= \left\{x \in \mathbb{R}/\ x \neq -4 \ et \ x \neq \frac{2}{3}\right\} \\ &= \mathbb{R} \backslash \left\{-4, \frac{2}{3}\right\} \end{aligned}$$

d'où l'inéquation (I_4) *est définie sur* D.

Le signe de $\frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}$ *dépend du signe des expressions* : $3x^2 + 10x - 8$ *et* $x^2 - 6x + 9$.

$\left(Le\ signe\ de \frac{x^2 - 6x + 9}{3x^2 + 10x - 8}\ sur\ D\right)$.

On a : $x^2 - 6x + 9 = (x-3)^2 \geq 0$. *Et on a* $x^2 - 6x + 9 = 0 \iff (x-3)^2 = 0 \iff x = 3$.

Donc

x	$-\infty$	-4		$\frac{2}{3}$		3		$+\infty$
x^2-6x+9	$+$	|	$+$	|	$+$	0	$+$	
$3x^2+10x-8$	$+$	0	$-$	0	$+$	|	$+$	
$\frac{x^2-6x+9}{3x^2+10x-8}$	$+$	||	$-$	||	$+$	0	$+$	

D'où l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_4) *est :*

$$S = \left]-4, \frac{2}{3}\right[\cup \{3\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* (I_5) : $\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0$.

L'inéquation (I_5) *est définie sur* $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\sqrt{x^2+1} - 2x + 1 \leq 0 \iff \sqrt{x^2+1} \leq 2x - 1$$

Le tableau de signe de l'expression $2x - 1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$2x-1$		$-$	0	$+$	

■ Si $x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ *alors* $2x - 1 < 0$ *et l'inéquation n'a pas de solution puisque* $\left(\sqrt{x^2+1} > 0\right)$. *Donc*

$$S_1 = \varnothing$$

■ Si $x \in \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$ *alors* $2x - 1 \geq 0$ *donc*

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1} & \leq 2x-1 \\
& \Longleftrightarrow x^2+1 \leq (2x-1)^2 \\
& \Longleftrightarrow x^2+1 \leq 4x^2-4x+1 \\
& \Longleftrightarrow -3x^2+4x \leq 0 \\
& \Longleftrightarrow x(-3x+4) \leq 0 \\
& \Longleftrightarrow x \in]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[
\end{aligned}$$

donc

$$S_2 = \left( ]-\infty, 0[\cup \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[\right) \cap \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[= \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I_5) *est* :

$$S = S_1 \cup S_2 = \left[\frac{4}{3}, +\infty\right[$$

Exercice 7 .

Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : x^2 - 2(1+m)x + 4 = 0.$ $(m \in \mathbb{R})$.
Calculons Δ :

$$\begin{aligned}
\Delta &= b^2 - 4ac \\
&= [-2(1+m)]^2 - 4 \times 1 \times 4 \\
&= [-2(1+m)]^2 - 4^2 \\
&= [(-2-2m) - 4][-2(1+m) + 4] \\
&= (-2m-6)(-2m+2) \\
&= 4(m-1)(m+3)
\end{aligned}$$

On cherche le tableau de signe de l'expression $4(m-1)(m+3)$:

m	$-\infty$		-3		1		$+\infty$
$m-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$m+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$(m-1)(m+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

♠ Si $m \in \left]-\infty,-3\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ *alors* $\Delta > 0$ *donc l'équation* (E) *admet deux solutions réelles distinctes* x_1 *et* x_2 *telles que :*

$$x_1 = \frac{2\,(1+m) + \sqrt{4\,(m-1)\,(m+3)}}{2} = (1+m) + \sqrt{(m-1)\,(m+3)}$$

et

$$x_2 = \frac{2\,(1+m) - \sqrt{4\,(m-1)\,(m+3)}}{2} = (1+m) - \sqrt{(m-1)\,(m+3)}$$

D'où

$$S = \left\{(1+m) - \sqrt{(m-1)\,(m+3)}, (1+m) + \sqrt{(m-1)\,(m+3)}\right\}$$

♠ Si $m \in \left]-3,1\right[$ *alors* $\Delta < 0$ *donc l'équation n'admet pas des solutions dans* $\mathbb{R}$. *D'où*

$$S = \varnothing$$

♠ Si $m = 1$ *alors* $\Delta = 0$ *donc l'équation admet unique solution* $\dfrac{2\,(1+m)}{2} = 2$. *D'où*

$$S = \{2\}$$

♠ Si $m = -3$ *alors* $\Delta = 0$ *donc l'équation admet unique solution* $\dfrac{2\,(1+m)}{2} = -2$. *D'où*

$$S = \{-2\}$$

Exercice 8 .

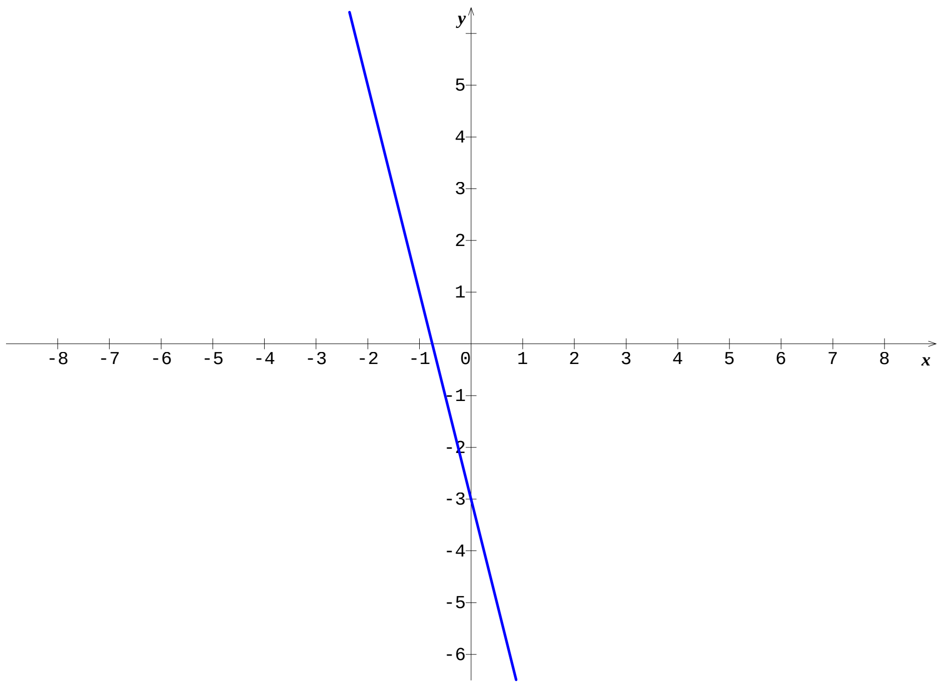
♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *l'équation* $(E_1) : 4x + y + 3 = 0$.

$$4x + y + 3 = 0 \iff y = -4x - 3$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_1) *est :*

$$S = \{(x, 4x - 3)\,,\ x \in \mathbb{R}\}$$

La represenatation graphique de l'ensemble des solutions



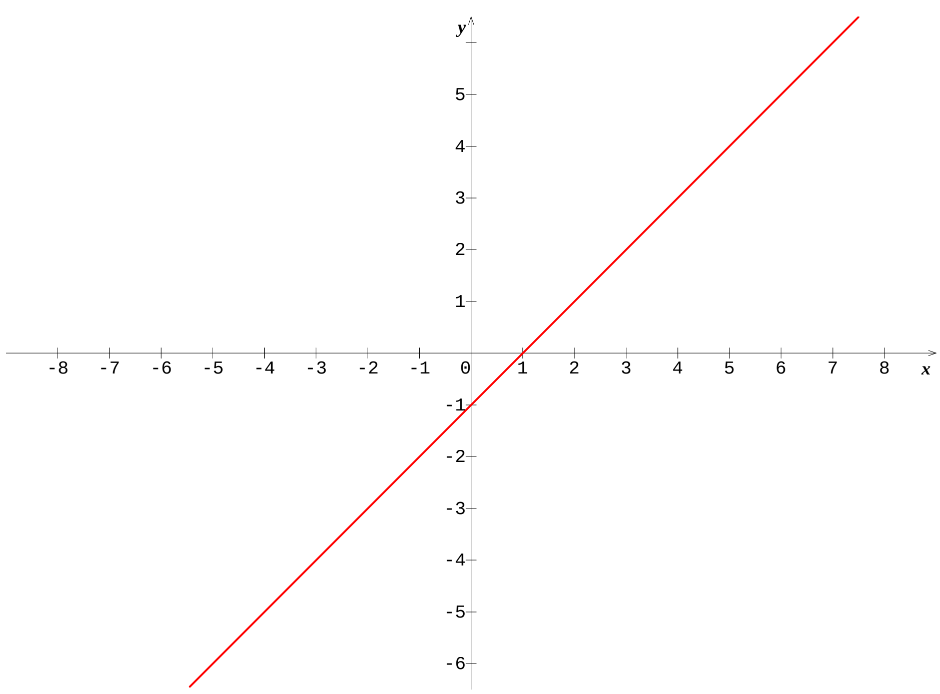
♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *l'équation* $(E_2) : 2x - 7y + 3 = -x - 4y + 6.$

$$2x - 7y + 3 = -x - 4y + 6 \iff 3x - 3y - 3 = 0 \iff x - y - 1 = 0 \iff y = x - 1$$

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E_2) *est :*

$$S = \{(x, x-1)\,,\ x \in \mathbb{R}\}$$

La represenatation graphique de l'ensemble des solutions



Exercice 9 .

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S_1) : \begin{cases} 2x + y = 4 \\ \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système (S_1) : $D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 2 \times (-2) - 1 \times 5 = -9 \neq 0$$

donc le système (S_1) *admet une seule solution est le couple* (x, y) *tel que :*

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{-8-1}{-9} = 1 \quad et \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix}}{-9} = \frac{2-20}{-9} = \frac{-18}{-9} = 2$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(1, 2)\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S_2) : \begin{cases} -x + 2y - 8 = 0 \\ \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases}$

On a

$$\begin{cases} -x + 2y - 8 = 0 \\ \\ -3x + y + 1 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} -x + 2y = 8 \\ \\ -3x + y = -1 \end{cases}$$

On calcule le déterminant du système : $D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = -1 \times 1 + 2 \times 3 = 5 \neq 0$$

donc le système (S_1) *admet une seule solution est le couple* (x, y) *tel que :*

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 8 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{8+2}{5} = -\frac{10}{5} = 2 \quad et \ y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 8 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{-5} = \frac{1+24}{5} = \frac{25}{5} = 5$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(2, 5)\}$$

Exercice 10 .

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S_1) : \begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 9 \\ \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$

On cherche l'ensemble de définition du système (S_1) *:*

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 /\ x \neq 0 \ \text{ et } y \neq 0\right\}$$

donc le système (S_1) *est défini sur* D.

On a

$$\begin{cases} \dfrac{3}{x} + \dfrac{2}{y} = 9 \\ \\ \dfrac{5}{x} - \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} 3 \times \dfrac{1}{x} + 2 \times \dfrac{1}{y} = 9 \\ \\ 5 \times \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{y} = 2 \end{cases}$$

On pose $X = \dfrac{1}{x}$ *et* $Y = \dfrac{1}{y}$ *le système devient* $\begin{cases} 3X + 2Y = 9 \\ \\ 5X - Y = 2 \end{cases}$. *Calculons le déterminant* D *du système :*

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{vmatrix} = 3 \times (-1) - 2 \times 5 = -13$$

donc le système (S_1) *admet une seule solution est le couple* (X, Y) *tel que :*

$$X = \frac{D_X}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 9 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{-9-4}{-13} = 1 \quad \text{et } Y = \frac{D_Y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 2 \end{vmatrix}}{-13} = \frac{6-45}{-13} = \frac{-39}{-13} = 3$$

donc

$$X = 1 \text{ et } Y = 3 \iff \frac{1}{x} = 1 \text{ et } \frac{1}{y} = 3 \iff x = 1 \text{ et } y = \frac{1}{3}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \left\{\left(1, \frac{1}{3}\right)\right\}$$

♣ *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S_1) : \begin{cases} 3\,|x+2| + 4\,|y-5| = -9 \\ \\ 2\,|x+2| - |y-5| = -6 \end{cases}$

L'équation $3\,|x+2| + 4\,|y-5| = -9$ *est impossible. Donc*

$$S = \varnothing$$

Exercice 11 .

1. *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S_1) : \begin{cases} 2x+5y=7 \\ \\ 3x-4y=-1 \end{cases}$

On calcule le déterminant du système : $D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}$

On a

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2\times 4 - 5\times 3 = -23 \neq 0$$

donc le système (S_1) *admet une seule solution est le couple* (x,y) *tel que :*

$$\begin{aligned} x &= \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 7 & 5 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{7\times(-4)-5\times(-1)}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1 \\ & \quad et \\ y &= \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{-23} = \frac{-2-21}{-23} = \frac{-23}{-23} = 1 \end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(1,1)\}$$

2. *On déduit dans* $\mathbb{R}^2$ *l'ensemble des solutions du système :* $(S) : \begin{cases} 2\sqrt{x-3}+5\,|2y-3| = 7 \\ \\ 3\sqrt{x-3}-4\,|2y-3| = -1 \end{cases}$

On cherche l'ensemble de définition du système (S) *:*

$$D = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x-3 \geq 0\right\} = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ x \geq 3\right\}$$

donc le système (S) *est défini sur* D*.*

On pose $X = \sqrt{x-3}$ *et* $Y = |2y-3|$ *, le système devient* $\begin{cases} 2X+5Y=7 \\ \\ 3X-4Y=-1 \end{cases}$ *. D'après la question précédente on déduit que*

$$\begin{aligned} X &= 1 \ \ et \ \ Y=1 \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{x-3}=1 \ \ et \ \ |2y-3|=1 \\ &\Longleftrightarrow x-3=1 \ \ et \ \ (2y-3=1 \ ou\ 2y-3=-1) \\ &\Longleftrightarrow x=4 \ \ et \ \ (2y=4 \ \ ou\ 2y=2) \\ &\Longleftrightarrow x=4 \ \ et \ \ (y=2 \ ou\ y=1) \\ &\Longleftrightarrow (x=4 \ et\ y=2) \ \ ou \ \ (x=4 \ et\ y=1) \end{aligned}$$

d'où l'ensemble des solutions du système est

$$S = \{(4,2)\,,\ \ (4,1)\}$$

Exercice 12 .

Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ *le système suivant :* $(S) : \begin{cases} mx + 4y = m + 2 \\ \\ x + my = 2 \end{cases}$ *avec* $m \in \mathbb{R}$.

Calculons le déterminant du système $D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix}$:

$$D = \begin{vmatrix} m & 4 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m^2 - 4$$

Résolvons l'équation : $m^2 - 4 = 0$.

$$m^2 - 4 = 0 \iff (m-2)(m+2) = 0 \iff m = 2 \text{ ou } m = -2$$

■ Si $m \neq 2$ *et* $m \neq -2$ *alors le système* (S) *admet une seule solution est le couple* (x, y) *tel que :*

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m+2 & 4 \\ 2 & m \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{m(m+2) - 8}{m^2 - 4} = \frac{m^2 + 2m - 8}{(m-2)(m+2)} = \frac{m+4}{m+2}$$

et

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{\begin{vmatrix} m & m+2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}{m^2-4} = \frac{2m - (m+2)}{m^2 - 4} = \frac{2m - m - 2}{m^2 - 4} = \frac{m-2}{(m+2)(m-2)} = \frac{1}{m+2}$$

d'où l'ensemble des solutions du système (S) *est*

$$S = \left\{ \left(\frac{m+4}{m+2}, \frac{1}{m+2} \right) \right\}$$

■ Si $m = 2$ *alors le système devient* $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ \\ x + 2y = 2 \end{cases}$ *qui est équivaut à* $\begin{cases} 2x + 4y = 4 \\ \\ 2x + 4y = 4 \end{cases}$.

Donc le système admet une infinité de solutions ce sont les solutions de l'équation $2x + 4y = 4$. *Comme* $y = -\dfrac{1}{2}x + 1$. *Donc*

$$S = \left\{ \left(x, -\frac{1}{2}x + 1 \right),\ x \in \mathbb{R} \right\}$$

■ Si $m = -2$ *alors le système devient* $\begin{cases} -2x + 4y = 0 \\ \\ x - 2y = 2 \end{cases}$ *qui est équivaut à* $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ \\ x - 2y = 2 \end{cases}$.

Donc le système n'admet aucun solution. Donc

$$S = \varnothing$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com