Correction du devoir Surveillé N2

Exercice 1 .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x$

1. *Montrons que* : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

   $$2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{6} + \cos x \sin\frac{\pi}{6}\right) = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x\right) = \cos x + \sqrt{3}\sin x$$

2. *Montrons que* : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

   $$f(x) = 2\cos^2 x + \sqrt{3}\sin 2x = 2\cos^2 x + 2\sqrt{3}\sin x\cos x = 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)$$

3. *On déduit que* : $(\forall x \in \mathbb{R})$, $f(x) = 4\cos x \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$.

   Soit $x \in \mathbb{R}$.

   On a $f(x) = 2\cos x\left(\cos x + \sqrt{3}\sin x\right)$ *et comme* $\cos x + \sqrt{3}\sin x = 2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ *donc*

   $$f(x) = 4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right).$$

4. *Résolvons dans* $[-\pi, \pi]$ *l'équation* $f(x) = 0$.

   Soit $x \in [-\pi, \pi]$.

   $$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ &\Longleftrightarrow 4\cos x\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow 4\cos x = 0 \quad ou \quad \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \cos x = 0 \ \ ou \ \ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) = 0 \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou\ x + \frac{\pi}{6} = k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \\ &\Longleftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad ou\ x = -\frac{\pi}{6} + k\pi \quad / \quad k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

   Comme $x \in [-\pi, \pi]$ *alors*

♣ $-\pi \leq \dfrac{\pi}{2} + k\pi \leq \pi \iff -1 \leq \dfrac{1}{2} + k \leq 1 \iff \dfrac{-3}{2} \leq k \leq \dfrac{1}{2}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k \in \{-1, 0\}$. *Donc* $x = \dfrac{-\pi}{2}$ *ou* $x = \dfrac{\pi}{2}$.

♣ $-\pi \leq -\dfrac{\pi}{6} + k\pi \leq \pi \iff -1 \leq -\dfrac{1}{6} + k \leq 1 \iff \dfrac{-5}{6} \leq k \leq \dfrac{7}{6}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k \in \{0, 1\}$. *Donc* $x = -\dfrac{\pi}{6}$ *ou* $x = \dfrac{5\pi}{6}$.

donc l'ensemble des solutions de l'équation $f(x) = 0$ *dans* $[-\pi, \pi]$ *est :*

$$S = \left\{ \frac{-\pi}{2}, \frac{-\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6} \right\}$$

Exercice 2 .

1. ♣ *Résolvons dans* $]-\pi, \pi[$ *l'équation* $(E) : 2\cos x - 1 = 0$.
   Soit $x \in]-\pi, \pi[$.

$$2\cos x - 1 = 0 \iff \cos x = \frac{1}{2} \iff \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{-\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z}$$

Comme $x \in [-\pi, \pi]$ *alors*

♣ $-\pi < \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < \pi \iff -1 < \dfrac{1}{3} + 2k < 1 \iff \dfrac{-2}{3} < k < \dfrac{1}{3}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \dfrac{\pi}{3}$.

♣ $-\pi < -\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi < \pi \iff -1 \leq -\dfrac{1}{3} + 2k \leq 1 \iff \dfrac{-1}{3} \leq 2k \leq \dfrac{2}{3}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$. *Donc* $x = -\dfrac{\pi}{3}$.

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E) *est :*

$$S = \left\{ -\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3} \right\}$$

♣ *Résolvons dans* $]-\pi, \pi[$ *l'équation* $(E') : 2\sin x - \sqrt{3} = 0$.

Soit $x \in \left]-\pi, \pi\right[$.

$$\begin{aligned} 2\sin x - \sqrt{3} &= 0 \\ &\iff \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &\iff \sin x = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \pi - \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{c} x = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi \\ ou \\ x = \dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{array} \right. \quad /k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Comme $x \in [-\pi, \pi]$ *alors*

♣ $-\pi < \frac{\pi}{3} + 2k\pi < \pi \iff \frac{-2}{3} < k < \frac{1}{3}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \frac{\pi}{3}$.

♣ $-\pi < \frac{2\pi}{3} + 2k\pi < \pi \iff -1 < -\frac{2}{3} + 2k < 1 \iff \frac{-1}{6} < k < \frac{5}{6}$. *Puisque* $k \in \mathbb{Z}$ *alors* $k = 0$. *Donc* $x = \frac{2\pi}{3}$.

donc l'ensemble des solutions de l'équation (E') *est :*

$$S = \left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$$

2. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$, *on pose* $f(x) = 2\sin 2x - 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3}$.

a)

■ *Calculons* $f\left(\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\pi - 4\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} = 0 - 4\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} = -2 + \sqrt{3}$$

■ *Calculons* $f\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= 2\sin\frac{\pi}{2} - 4\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \\ &= 2 - 4\left(\sin\frac{\pi}{4}.\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}.\sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \\ &= 2 - 4\left(\frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} \\ &= 2 - \sqrt{2} - \sqrt{6} + \sqrt{3} \end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ f(x) = (2\cos x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right).$

Soit $x \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin 2x - 4\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \\ &= 4\sin x\cos x - 4\left(\sin x.\cos\frac{\pi}{3} + \cos x.\sin\frac{\pi}{3}\right) + \sqrt{3} \\ &= 4\sin x.\cos x - 4\left(\sin x.\frac{1}{2} + \cos x.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \sqrt{3} \\ &= 4\sin x.\cos x - 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3} \end{aligned}$$

comme $(2\cos x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right) = 4\sin x.\cos x - 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x + \sqrt{3}$ *donc*

$$(\forall x \in \mathbb{R})\,, f(x) = (2\cos x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right).$$

3. *Résolvons dans* $[-\pi, \pi]$ *l'inéquation* $(I) : f(x) > 0$.

On a , $f(x) = (2\cos x - 1)\left(2\sin x - \sqrt{3}\right)$ *donc le signe de* $f(x)$ *sur* $[-\pi, \pi]$ *dépend du signe de* $2\cos x - 1$ *et* $2\sin x - \sqrt{3}$.

Et on a

$\diamondsuit$ $2\cos x - 1 = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{-\pi}{3}$

$\diamondsuit$ $2\sin x - \sqrt{3} = 0 \iff x = \dfrac{\pi}{3}$ *ou* $x = \dfrac{2\pi}{3}$

donc d'après le cercle trigonométrique on déduit le tableau de signe suivant

x	$-\pi$		$\frac{-\pi}{3}$		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{2\pi}{3}$		π
$2sinx{-}\sqrt{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	0	$-$	
$2cosx{-}1$		$-$	0	$+$	0	$-$	|	$-$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$-$	0	$+$	

donc l'ensemble des solutions de l'inéquation (I) *est*

$$S = \left[-\pi, \frac{-\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{2\pi}{3}, \pi\right]$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com