# Correction du devoir Surveillé N1 (S2)

**Exercice 1** .

1. *Résolvons dans $\mathbb{R}$ les équation $(E)$ et $(E')$ :*

   ♣ *Calculons le discriminant $\Delta$ de l'équation $(E)$ :*
   *On a $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 2 = 1 > 0$. Donc l'équation $(E)$ admet deux solutions réelles distinctes $x_1$ et $x_2$ telles que :*

   $$x_1 = \frac{3-\sqrt{1}}{2\times 1} = 1 \quad et \quad x_2 = \frac{3+\sqrt{1}}{2\times 1} = 2$$

   *d'où l'ensemble des solutions de l'équation $(E)$ est :*

   $$S = \{1, 2\}$$

   ♣ *On a $\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$. Donc l'équation $(E')$ n'admet pas des solutions dans $\mathbb{R}$. D'où*

   $$S = \varnothing$$

2. *On déduit dans $\mathbb{R}$ l'ensemble des solutions de l'inéquation $(I)$ : $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+2} > 0$.*

   *On cherche l'ensemble de définition de l'inéquation $(I)$ :*

   $$D = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 - 3x + 2 \neq 0\right\}$$

   *on sait d'après la question précédente que l'équation $x^2-3x+2=0$ admet deux solutions 1 et 2 donc*

   $$D = \{x \in \mathbb{R} / \ x \neq 1 \ et \ x \neq 2\} = \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$$

   *d'où l'inéquation $(I)$ est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{1,2\}$.*

   *Puisque le signe de $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+2}$ dépend du signe des trinômes $x^2+3x+4$ et $x^2-3x+2$. Donc on obtient le tableau de signe suivant :*

| $x$ | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-3x+2$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x^2+3x+4$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $\dfrac{x^2+3x+4}{x^2-3x+2}$ | | $+$ | $\Vert$ | $-$ | $\Vert$ | $+$ | |

*donc l'ensemble des solutions de l'inéquation* $(I)$ *est :*

$$S = ]-\infty, 1[ \cup ]2, +\infty[$$

**Exercice 2** .

1. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : 2x^2 + 4x - 6 = 0$.
   *Calculons le discriminant* $\Delta$ :
   *On a* $\Delta = b^2 - 4ac = 4^2 - 4 \times 2 \times (-6) = 64 > 0$. *Donc l'équation* $(E)$ *admet deux solutions réelles distinctes* $x_1$ *et* $x_2$ *telles que :*

$$x_1 = \frac{-4 - \sqrt{64}}{2 \times 2} = -3 \quad et \quad x_2 = \frac{-4 + \sqrt{64}}{2 \times 2} = 1$$

   *d'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est :*

$$S = \{-3, 1\}$$

   **b)** *On déduit l'ensemble des solutions de l'équation* $(E) : 2x + 4\sqrt{x} - 6 = 0$.
   *L'équation* $(E)$ *est définie sur* $[0, +\infty[$.
   *Soit* $x \in [0, +\infty[$.

$$2x + 4\sqrt{x} - 6 = 0 \iff 2\sqrt{x^2} + 4\sqrt{x} - 6 = 0 \quad (1)$$

   *On pose* $X = \sqrt{x}$ *avec* $X \in [0, +\infty[$. *Donc l'équation* $(1)$ *devient* $(E') : 2X^2 + 4X - 6 = 0$, *et d'après la question précédente on obtient*

$$2X^2 + 4X - 6 = 0 \iff X = -3 \text{ ou } X = 1 \quad \iff \sqrt{x} = -3 \text{ ou } \sqrt{x} = 1$$

   *l'équation* $\sqrt{x} = -3$ *est impossible donc*

$$2x + 4\sqrt{x} - 6 = 0 \iff \sqrt{x} = 1 \iff x = 1$$

   *d'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est*

$$S = \{1\}$$

2. *On considère le polynôme* $P(x) = 2x^3 - 7x^2 + 7x - 2$

   **a)** *On a* $P(0) = -2 \neq 0$ *donc* $0$ *n'est pas une racine du polynôme* $P(x)$.

   **b)** *Montrons que si* $\alpha$ *est une racine du* $P(x)$ *alors il en de même* $\dfrac{1}{\alpha}$.

   *On suppose que* $\alpha$ *est une racine du polynôme* $P(x)$ *et on montre que* $\dfrac{1}{\alpha}$ *est une racine du* $P(x)$.
   *On a* $\alpha$ *est une racine du polynôme* $P(x)$ *c'est-à-dire* $P(\alpha) = 0$ $(\alpha \neq 0$ *car* $0$ *n'est pas une racine* *donc*

$$2\alpha^3 - 7\alpha^2 + 7\alpha - 2 = 0$$

*on a*

$$\begin{aligned}
P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 2\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3-7\times\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2+7\times\frac{1}{\alpha}-2\\
&= \frac{2}{\alpha^3}-\frac{7}{\alpha^2}+\frac{7}{\alpha}-2\\
&= \frac{2-7\alpha+7\alpha^2-2\alpha^3}{\alpha^3}\\
&= \frac{-\left(2\alpha^3-7\alpha^2+7\alpha-2\right)}{\alpha^3}\\
&= \frac{-P\left(\alpha\right)}{\alpha^3}\\
&= \frac{0}{\alpha^3}=0
\end{aligned}$$

*donc* $\frac{1}{\alpha}$ *est une racine du polynôme* $P\left(x\right).$

**c)** *On a* $P\left(2\right)=2\times2^3-7\times2^2+7\times2-2=0,$ *donc* $2$ *est une racine du polynôme* $P\left(x\right).$

**d)** *On cherche un polynôme* $Q\left(x\right)$ *tel que :* $P\left(x\right)=\left(x-2\right)Q\left(x\right).$

*On a* $2$ *est une racine du polynôme* $P\left(x\right)$ *ceci signifie que le polynôme* $P\left(x\right)$ *est divisible par* $\left(x-2\right)$ *donc il existe un polynôme* $Q\left(x\right)$ *tel que*

$$P\left(x\right)=\left(x-2\right)Q\left(x\right)$$

*On a* $\deg\left(P\left(x\right)\right)=3$ *donc le degré du polynôme* $Q\left(x\right)$ *est* $2$ *d'où* $Q\left(x\right)=ax^2+bx+c$ *avec* $a\neq0.$

*On écrit le polynôme* $\left(x-2\right)\left(ax^2+bx+c\right)$ *sous la forme réduite*

$$\begin{aligned}
\left(x-2\right)\left(ax^2+bx+c\right) &= ax^3+bx^2+cx-2ax^2-2bx-2c\\
&= ax^3+x^2\left(b-2a\right)+x\left(c-2b\right)-2c
\end{aligned}$$

*et comme* $P\left(x\right)=2x^3-7x^2+7x-2$ *donc d'après l'égalité de deux polynômes on obtient*

$$\begin{cases} a=2\\ b-2a=-7\\ c-2b=7\\ -2c=-2\end{cases}\iff\begin{cases} a=2\\ b=-7+2\times2\\ c=7+2b\\ c=1\end{cases}\iff\begin{cases} a=2\\ b=-3\\ c=1\end{cases}$$

*donc* $Q\left(x\right)=2x^2-3x+1.$ *C-à-d* $P\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(2x^2-3x+1\right).$

**e)** *On factorise* $P\left(x\right)$ *sous la forme de* $3$ *binômes de degré* $1.$

*On a* $P\left(x\right)=\left(x-2\right)\left(2x^2-3x+1\right).$ *On factorise le trinôme* $2x^2-3x+1.$

*On a* $\Delta = b^2 - 4ac = (-3)^2 - 4 \times 2 \times 1 = 1 > 0$, *donc le trinôme* $2x^2 - 3x + 1$ *admet deux racine réelles distinctes* $x_1$ *et* $x_2$ *telles que :*

$$x_1 = \frac{3+1}{4} = 1 \text{ et } x_2 = \frac{3-1}{4} = \frac{1}{2}$$

*d'où* $2x^2 - 3x + 1 = 2(x-1)\left(x - \frac{1}{2}\right)$ *donc* $P(x) = 2(x-2)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$.

3. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation* $P(x) \leq 0$.

   *On a* $P(x) = 2(x-2)(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)$ *donc le signe de* $P(x)$ *dépend le signe des binômes* $x-2$, $x-1$ *et* $x - \frac{1}{2}$ .

| $x$ | $-\infty$ | $\frac{1}{2}$ | | $1$ | | $2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x-2$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $x-\frac{1}{2}$ | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ |
| $x-1$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $P(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |

   *donc l'ensemble des solutions de l'iéquation* $(I)$ *est :*

$$S = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, 2]$$

4. *Résolvons dans* $\mathbb{R}$ *l'équation* $(E) : 2|x|^3 - 7x^2 + 7|x| - 2 = 0$.

   *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

   *On sait que* $x^2 = |x|^2$ *donc l'équation* $(E)$ *devient* $2|x|^3 - 7|x|^2 + 7|x| - 2 = 0$ *qui est équivaut à* $P(|x|) = 0$. *Donc*

$$\begin{aligned}
P(|x|) &= 0 \\
&\iff 2(|x|-2)(|x|-1)\left(|x| - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff (|x|-2)(|x|-1)\left(|x| - \frac{1}{2}\right) = 0 \\
&\iff |x| - 2 = 0 \text{ ou } |x| - 1 = 0 \text{ ou } |x| - \frac{1}{2} = 0 \\
&\iff |x| = 2 \text{ ou } |x| = 1 \text{ ou } |x| = \frac{1}{2} \\
&\iff x = 2 \text{ ou } x = -2 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2} \text{ ou } x = -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

*d'où l'ensemble des solutions de l'équation* $(E)$ *est*

$$S = \left\{-2, \frac{-1}{2}, -1, \frac{1}{2}, 1, 2\right\}$$

5. *Soit* $\alpha$ *un réel tel que :* $2 < \alpha < 3$.

   ♣ *On encadre* $\alpha - 1$

   *On a* $2 < \alpha < 3$ *alors* $2 - 1 < \alpha - 1 < 3 - 1$ *c'est-à-dire* $1 < \alpha - 1 < 2$.

   ♣ *On encadre* $\alpha - 2$.

   *On a* $2 < \alpha < 3$ *alors* $2 - 2 < \alpha - 1 < 3 - 2$ *c'est-à-dire* $0 < \alpha - 2 < 1$.

   ♣ *On encadre* $P(\alpha)$ :

   *On a* $P(\alpha) = 2(\alpha - 2)(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right)$ *et on sait que* $1 < \alpha - 1 < 2$ *et* $0 < \alpha - 2 < 1$ *et comme* $\frac{3}{2} < \alpha - \frac{1}{2} < \frac{5}{2}$ *donc en multipliant membre par membre ces encadrements on obtient*

$$\begin{aligned}
0 \times 1 \times \frac{3}{2} \quad &< \quad (\alpha - 2)(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) < 2 \times 1 \times \frac{5}{2} \\
&\iff \quad 0 < (\alpha - 2)(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) < 5 \\
&\iff \quad 0 < 2(\alpha - 2)(\alpha - 1)\left(\alpha - \frac{1}{2}\right) < 10 \\
&\iff \quad 0 < P(\alpha) < 10
\end{aligned}$$

**Exercice 3** .

1. **a)** *Résolvons dans* $\mathbb{R}^2$ *l'équation* $(E) : 4x + y + 3 = 0$.

   *On a*

$$4x + y + 3 = 0 \iff y = -4x - 3$$

   *donc les solutions de l'équation* $(E)$ *sont les couples* $(x, -4x - 3)$, *d'où*

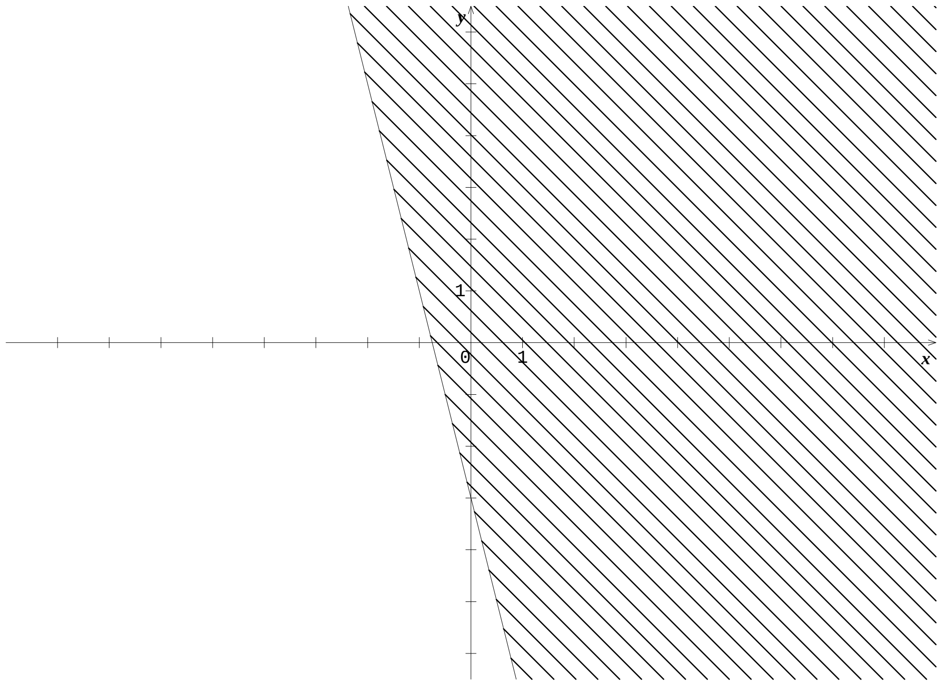
$$S = \{(x; -4x - 3),\ x \in \mathbb{R}\}$$

   **b)** *Résolvons graphiquement l'inéquation* $(I) : 4x + y + 3 > 0$

   *On représente la droite* $(D)$ *d'équation* $4x + y + 3 = 0$ *dans un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

   *On cherche le demi-plan qui vérifie l'inéquation* $(I)$.

On a $O\left(0,0\right) \longmapsto 4 \times 0 + 0 + 3 = 3 > 0$.




Donc les solutions de l'inéquation $(I)$ est l'ensemble des points $M\left(x,y\right)$ du demi-plan ouvert $(P)$ délimité par la droite $(D)$ et ne contenant pas le point $O\left(0,0\right)$. (La partie hachurée)

2. Résolvons dans $\mathbb{R}^2$ le système suivant $(S)$ : $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ -x + 4y = 2 \end{cases}$

   Calculons le déterminant $D$ du système $(S)$.

   On a $D = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0$ donc le système $(S)$ admet une seule solution est le couple $(x,y)$ tel que :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}{6} = \frac{16-4}{6} = 2 \quad et \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}}{6} = \frac{2+4}{6} = 1$$

   donc l'ensemble des solutions du système $(S)$ est :

$$S = \{(2,1)\}$$

3. Résolvons graphiquement le système $(S)$ : $\begin{cases} 4x + y - 5 \leq 0 \\ -x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$

   ♣ On cherche le demi-plan qui vérifie l'inéquation $4x + y - 5 \leq 0$.
   On a $O\left(0,0\right) \longmapsto 4 \times 0 + 0 - 5 = -5 \leq 0$.
   Donc $4x + y - 5 \leq 0$ détermine l'ensemble des points $M\left(x,y\right)$ du demi-plan $(P_1)$ fermé délimite par la droite $(D) : 4x + y - 5 = 0$ et contenant le point $O$.

♣ *On cherche le demi-plan qui vérifie l'inéquation* $-x+y-2 \leq 0$.

*On a* $O\,(0,0) \longmapsto 0+0-2=-2 \leq 0$.

*Donc* $-x+y-2 \leq 0$ *détermine l'ensemble des points* $M\,(x,y)$ *du demi-plan* $(P_2)$ *fermé délimite par la droite* $(D) : -x+y-2=0$ *et contenant le point* $O$.

*Ainsi l'ensemble des solutions du système* $(S)$ *est l'ensemble des points* $M\,(x,y)$ *qui font partie de l'intersection de* $(P_1)$ *et* $(P_2)$.

# FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**