Correction du devoir

Exercice 1 .

1. *On cherche une équation cartésienne du cercle* (C) :
   Une équation cartésienne du cercle (C) *de centre* $A(4,-3)$ *et de rayon* $R=5$ *est* :
   $$(x-4)^2+(y+3)^2=5^2$$
   que l'on peut écrire
   $$x^2+y^2-8x+6y=0$$

2. **a)** *Calculons* AB :
   On a
   $$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} \\ &= \sqrt{(11-4)^2+(-2+3)^2} \\ &= \sqrt{7^2+1^2} \\ &= \sqrt{50} \end{aligned}$$

   b) *On a* $AB=\sqrt{50}>5=R$, *donc le point* B *est à l'extérieur du cercle* (C).

3. **a)** *Montrons que* : $4x-3y-50=0$ *est une équation cartésienne de* (D) :
   On a $\overrightarrow{OA}(4,-3)$ *est un vecteur normal à la droite* (D) *donc une équation catéseinne de la droite* (D) *s'écrit sous la forme*
   $$4x-3y+c=0$$
   et comme $B\in(D)$ *alors*
   $$4x_B-3y_B+c=0 \iff 4\times 11-3\times(-2)+c=0 \iff c=-50$$
   donc (D) : $4x-3y-50=0$.

   b) *Vérifions que* (D) *est tangente au cercle* (C).
   Calculons $d(A,(D))$:
   $$\begin{aligned} d(A,(D)) &= \frac{|4x_A-3y_A-50|}{\sqrt{4^2+(-3)^2}} \\ &= \frac{|4\times 4-3\times(-3)-50|}{\sqrt{16+9}} \\ &= \frac{|16+9-50|}{5} \\ &= \frac{|25-50|}{5}=5=R \end{aligned}$$
   donc la droite (D) *est tangente au cercle* (C).

4. **a)** *On a* $E(7,1)$ *alors*

$$x_E^2+y_E^2-8x_E+6y_E=7^2+1^2-8\times 7+6\times 1=50-50=0$$

donc $E\in(C)$.

b) *On cherche une équation cartésienne de la tangente* (Δ) *au cercle* (C) *en* E.

Méthode 1 . *On utilise la formule du cours on obtient*

$$(x-x_E)\left(\frac{(-8)}{2}+x_E\right)+(y-y_E)\left(\frac{6}{2}+1\right)=0$$

c'est-à-dire

$$(x-7)\left(\frac{(-8)}{2}+7\right)+(y-1)\left(\frac{6}{2}+1\right)=0\iff 3(x-7)+4(y-1)=0\iff 3x+4y-25$$

donc une équation cartésienne de la tangente (Δ) *est* : $3x+4y-25=0$.

Méthode 2 .

Soit $M(x,y)$ *un point du plan.*

$$\begin{aligned}M(x,y)\ \epsilon\ (\Delta) &\iff \overrightarrow{EM}.\overrightarrow{EA}=0\\ &\iff -3(x-7)-4(y-1)=0\\ &\iff -3x+21-4y+4=0\\ &\iff -3x-4y+25=0\\ &\iff 3x+4y-25=0\end{aligned}$$

donc une équation cartésienne de la tangente (Δ) *est* : $3x+4y-25=0$.

c) *Montrons que* $(D)\perp(\Delta)$:

On a $\overrightarrow{u}(3,4)$ *est un vecteur normal à la droite* (Δ), *et* $\overrightarrow{v}(4,-3)$ *est un vecteur normal à la droite* (D) *et comme*

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v}=3\times 4+4\times(-3)=0$$

donc $\overrightarrow{u}\perp\overrightarrow{v}$ *d'où* $(D)\perp(\Delta)$.

Exercice 2 .

1. *On a* $\overrightarrow{AB}(-1,-1)$ *et* $\overrightarrow{AC}(3,-3)$ *et comme* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=-1\times 3+(-1)\times(-3)=0$. *On déduit que le trinagle* ABC *est rectangle en* A.

2. *On cherche une équation cartéseinne de* (BC) :

   Soit $M(x,y)$ *un point du plan.*

$$\begin{aligned}M(x,y)\ \epsilon\ (BC) &\iff \overrightarrow{BC}\text{ et }\overrightarrow{BM}\text{ sont colinéaires}\\ &\iff \det\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BC}\right)=0\\ &\iff \begin{vmatrix} x+2 & 4\\ y-1 & -2\end{vmatrix}=0\\ &\iff -2(x+2)-4(y-1)=0\\ &\iff -2x-4-4y+4=0\\ &\iff -2x-4y\ =0\\ &\iff x+2y=0\end{aligned}$$

donc une équation cartéseinne de la droite (BC) *est* : $x + 2y = 0$.

3. ♣ *Calculons* $\cos\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$:

   On a

$$\cos\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| . \left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{-1 \times (-2) + 2 \times 1}{\sqrt{1+4}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{4}{5}$$

   ♣ *On a*

$$\sin\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \frac{\det\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)}{\left\|\overrightarrow{OA}\right\| . \left\|\overrightarrow{OB}\right\|} = \frac{\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1+4}.\sqrt{(-2)^2 + 1^2}} = \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5}$$

4. *Montrons que le triangle* OAC *est isocèle.*

   On a $OA = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ *et* $OB = \sqrt{(-2)^2 + 1^2} = \sqrt{5}$, *alors* $OA = OB$ *donc le triangle* OAC *est isocèle en* O.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**