Correction du devoir Surveillé N1

Exercice 1 .

1. *Le nombre* 2 *est premier. Vérifions que* : 409 *est premier.*

   - ♣ *Calculons* $\sqrt{409}$. *On a* $\sqrt{409} \sim 20,22$.
   - ♣ *Les nombres premiers inférieures à* 409 *sont* : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19.
   - ♣ *aucuns de ces nombres ne divise* 409.

   Donc 409 *est premier.*

2. *On décompose* 50400 *et* 12600.
   On a : $50400 = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$ *et* $12600 = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7$

3. *On cherche* $PGCD\,(50400, 12600)$ *et* $PPCM\,(50400, 12600)$

   $PGCD\,(50400, 12600) = 2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 12600$ *et* $PPCM\,(50400, 12600) = 2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7 = 50400$

4. *Simplifions* : $\sqrt{12600}$, $\sqrt{50400}$ *et* $\dfrac{50400}{12600}$

   ♣

$$
\begin{aligned}
\sqrt{50400} &= \sqrt{2^5 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} \\
&= \sqrt{2 \times 2^4 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} \\
&= \sqrt{\left(2^2\right)^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 2 \times 7} \\
&= \sqrt{\left(2^2\right)^2 \times 3^2 \times 5^2} \times \sqrt{2 \times 7} \\
&= 4 \times 3 \times 5 \times \sqrt{14} \\
&= 60\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

   ♣

$$
\begin{aligned}
\sqrt{12600} &= \sqrt{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7} \\
&= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2 \times 2 \times 7} \\
&= \sqrt{2^2 \times 3^2 \times 5^2} \times \sqrt{2 \times 7} \\
&= 2 \times 3 \times 5 \times \sqrt{14} \\
&= 30\sqrt{14}
\end{aligned}
$$

♣

$$\begin{aligned}\frac{50400}{12600} &= \frac{2^5\times 3^2\times 5^2\times 7}{2^3\times 3^2\times 5^2\times 7}\\ &= \frac{2^2}{1}\\ &= 4\end{aligned}$$

5. *Montrons que :* $\sqrt{12600\times 50400}\in\mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\sqrt{12600\times 50400} &= \sqrt{12600}\times\sqrt{50400}\\ &= 30\sqrt{14}\times 60\sqrt{14}\\ &= 30\times 60\times 14\\ &= 25200\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

Donc

$$\sqrt{12600\times 50400}\in\mathbb{N}$$

Exercice 2 .

1. *Soit* $n\in\mathbb{N}$.

a) *Montrons que* n^2+n+4 *est pair.*

♣ Si n *est pair alors il existe* $k\in\mathbb{N}$ *tel que* $n=2k$.
donc

$$n^2+n+4=4k^2+2k+4=2\left(\underbrace{2k^2+2k+2}_{\in\mathbb{N}}\right)$$

d'où n^2+n+4 *est pair.*

♣ Si n *est impair alors il existe* $k\in\mathbb{N}$ *tel que* $n=2k+1$.
donc

$$\begin{aligned}n^2+n+4 &= (2k+1)^2+2k+1+4\\ &= 4k^2+4k+1+2k+1+4\\ &= 4k^2+6k+6\\ &= 2\left(\underbrace{2k^2+3k+3}_{\in\mathbb{N}}\right)\end{aligned}$$

d'où n^2+n+4 *est pair.*

Dans tous les cas on en déduit que n^2+n+4 *est pair.*

b) *On suppose que* m *est imapir et on montre que* m^2+15 *est divisible par* 8.

On a m est impair alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $m = 2k+1$. Donc

$$\begin{array}{rcl} m^2+15 & = & (2k+1)^2+15 \\ & = & 4k^2+4k+1+15 \\ & = & 4k^2+4k+16 \\ & = & 4\left(\underbrace{k^2+k+4}_{=2p}\right) \\ & = & 4\times 2p \\ & = & 8p \end{array}$$

d'où 8 divise m^2+15.

2. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*

a) *Montrons que 6 divise a.*

$$\begin{array}{rcl} a & = & 5^{n+2}-5^n \\ & = & 5^n\left(5^2-1\right) \\ & = & 5^n \times 24 \\ & = & 6\times 5^n \times 4 \end{array}$$

donc 6 divise a.

b) *On décompose a et b.*

On a : $a = 5^n \times 2^2 \times 2 \times 3 = 5^n \times 2^3 \times 3$. et $4500 = 2^2 \times 3^2 \times 5^3$.

c) *On cherche $PGCD\,(a,b)$ et $PPCM\,(a,b)$.*

♣ Si $n<3$ *alors* : $PGCD\,(a,b) = 5^n \times 2^2 \times 3$ *et* $PPCM\,(a,b) = 5^3 \times 2^3 \times 3^2$.

♣ Si $n=3$ *alors* : $PGCD\,(a,b) = 5^3 \times 2^2 \times 3$ *et* $PPCM\,(a,b) = 5^3 \times 2^3 \times 3^2$.

♣ Si $n>3$ *alors* : $PGCD\,(a,b) = 5^3 \times 2^2 \times 3$ *et* $PPCM\,(a,b) = 5^n \times 2^3 \times 3^2$.

Exercice 3 .

1.

$$-4 \notin \mathbb{N}, \quad 91 \in \mathbb{Z}\ , \quad \frac{1}{\sqrt{2}} \notin \mathbb{Q}\ , \quad \sqrt{2} \in \mathbb{R}$$

2. *Simplifions* :

■

$$\begin{aligned}
B &= \frac{2+\frac{1}{4}}{3-\frac{1}{4}} \times \frac{1+\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}-2} \times \frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}}{2-\frac{1}{6}} \\
&= \frac{\frac{9}{4}}{\frac{11}{4}} \times \frac{\frac{7}{5}}{\frac{-6}{5}} \times \frac{\frac{3}{6}}{\frac{11}{6}} \\
&= \frac{9}{4} \times \frac{4}{11} \times \frac{7}{5} \times \frac{5}{-6} \times \frac{3}{6} \times \frac{6}{11} \\
&= \frac{9 \times 7 \times 3}{11 \times (-6) \times 11} \\
&= \frac{9 \times 7}{-242} = -\frac{63}{242}
\end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned}
A &= \frac{7 \times (0,01)^3 \times 0,6^2}{12^2 \times 100^2 \times 25^{-1}} \\
&= \frac{7 \times (10^{-2})^3 \times (6 \times 10^{-1})^2}{(6 \times 2)^2 \times (10^2)^2 \times (5^2)^{-1}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-6} \times 6^2 \times 10^{-2}}{6^2 \times 2^2 \times 10^4 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-8}}{2^2 \times 10^4 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 10^{-12}}{2^2 \times 5^{-2}} \\
&= \frac{7 \times 2^{-12} \times 5^{-12}}{2^2 \times 5^{-2}} \\
&= 7 \times \frac{2^{-12}}{2^2} \times \frac{5^{-12}}{5^{-2}} \\
&= 7 \times 2^{-14} \times 5^{-10}
\end{aligned}$$

3. *Soit x un réel tel que : $x = 2+\sqrt{5}$. Vérifier que : $x + \frac{1}{x} = 2\sqrt{5}$.*

$$\begin{aligned}
x + \frac{1}{x} &= 2+\sqrt{5} + \frac{1}{2+\sqrt{5}} \\
&= 2+\sqrt{5} + \frac{(2-\sqrt{5})}{(2+\sqrt{5})(2-\sqrt{5})} \\
&= 2+\sqrt{5} + \frac{(2-\sqrt{5})}{4-5} \\
&= 2+\sqrt{5} - \left(2-\sqrt{5}\right) \\
&= 2+\sqrt{5} - 2 + \sqrt{5} \\
&= 2\sqrt{5}
\end{aligned}$$

4. Soit a et b deux reéls tels que : $0 < b \leq a$ *et* $A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$.

a) *Calculons* A^2.

Montrons d'abord que A existe.

A existe si et seulement si $a + \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ *et* $a - \sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$.

On a : $a > 0$ *et* $b > 0$ *alors :* $\sqrt{a^2 - b^2} \geq 0$ *donc :* $a + \sqrt{a^2 - b^2} > 0$. (1)

D'autre part, on a

$$a^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 = a^2 - a^2 + b^2 = b^2 > 0$$

alors : $a^2 - \left(\sqrt{a^2 - b^2}\right)^2 > 0$ *et comme a et* $\sqrt{a^2 - b^2}$ *sont positifs donc* $a > \sqrt{a^2 - b^2}$. *ceci signifie que*

$$a - \sqrt{a^2 - b^2} > 0. \ (2)$$

Donc d'après (1) *et* (2) *on en déduit que A existe.*

Calculons A^2 :

$$\begin{aligned} A^2 &= \left(\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}\right)^2 \\ &= a + \sqrt{a^2 - b^2} + 2\sqrt{\left(a + \sqrt{a^2 - b^2}\right)\left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right)} + \left(a - \sqrt{a^2 - b^2}\right) \\ &= 2a + 2\sqrt{a^2 - (a^2 - b^2)} \\ &= 2a + 2\sqrt{b^2} \\ &= 2a + 2b \\ &= 2(a + b) \end{aligned}$$

b) *Une valeur simplifiée pour A.*

On a $A > 0$ *et comme* $A^2 = 2(a + b)$ *alors*

$$\begin{aligned} A^2 &= 2(a+b) \\ \acute{E}q &: \quad \sqrt{A^2} = \sqrt{2(a+b)} \\ \acute{E}q &: \quad A = \sqrt{2(a+b)} \end{aligned}$$

donc

$$A = \sqrt{2(a+b)}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com