Professeur : Yahya MATIOUI

Série d'exercices sur le produit scalaire

Dans tout ce qui suit le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

Exercice 1 .

On considère les points : $A(4,0)$; $I\left(2,\sqrt{5}\right)$ *et* $J(1,0)$.

1. **a)** *Montrer que le triangle* AIJ *est isocèle en* A.

   b) *Calculer :* $\cos\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$ *et* $\sin\left(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}\right)$.

2. *Soit* (C) *le cercle de centre* I *et qui passe par* A.

   a) *Déterminer une équation cartésienne du cercle* (C).

   b) *Déterminer une équation cartésienne de la tangente au cercle* (C) *en* A.

   c) *Montrer que :* $2x+\sqrt{5}y-18=0$ *est une équation cartésienne de la tangente au cercle* (C).

Exercice 2 .

On considère les points : $A(2,0)$; $B(0,2)$ *et la droite* (D) *d'équation :* $x+y+2\sqrt{2}=0$.

1. **a)** *Déterminer une équation cartésienne de la droite* (Δ) *médiatrice du segment* $[AB]$.

   b) *Vérifier que :* $(D)\perp(\Delta)$.

   c) *Vérifier que le point* $C\left(-\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)$ *est le point d'intersection des droites* (D) *et* (Δ).

2. *On considère le point* $\Omega(a,b)$ *du plan.*

   Déterminer a *et* b *tels que* $\Omega\in(\Delta)$ *et* $A\Omega=C\Omega$.

3. *Montrer que :* $x^2+y^2=4$ *est une équation cartésienne à un cercle* (C) *de centre* Ω *et qui passe par le point* A.

4. *Montrer que la droite* (D) *est tangente au cercle* (C).

5. *Calculer* $\cos\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$.

Exercice 3 .

On considère les points : $A\left(1,\sqrt{5}\right)$; $B(-1,1)$ *et* $C(3,-1)$.

1. *Calculer le produit scalaire* $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ *puis en déduire la nature du triangle* ABC.

2. *Soit H le projeté orthogonal du point A sur (BC).*

   a) *Déterminer une équation cartésienne de chacune des droites (AH) et (BC).*

   b) *Déterminer le couple de coordonnées de H.*

   c) *En déduire la distance de A à la droite (BC).*

Exercice 4 .

On considère le cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2+y^2-2x+4y=0$ et la droite (D) d'équation cartésienne $3x-4y+m=0$ où $m \in \mathbb{R}$.

1. *Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle (C).*

2. *Calculer $d(\Omega,(D))$ puis déterminer les valeurs de m pour lesquelles (D) est tangente au cercle (C).*

Exercice 5 .

On considère les points : $A(-1,0)$; $B(2,0)$; $C(0,3)$ et $M(x,y)$.

1. **a)** *Calculer MA^2 et MB^2 en fonction de x et y.*

   b) *Montrer que : $4MB^2 = MA^2 \iff x^2+y^2-6x+5=0$.*

2. *Déterminer le centre Ω et le rayon R du cercle (C) d'équation cartésienne : $x^2+y^2-6x+5=0$.*

3. *Soit (D) la médiatrice du segment $[C\Omega]$.*

   a) *Montrer que $y=x$ est une équation cartésienne de la droite (D).*

   b) *Étudier l'intersection de (C) et (D).*

4. **a)** *Vérifier que le point O est à l'extérieur de (C).*

   b) *Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes (Δ_1) et (Δ_2) à (C) et passant par O.*

5. *Résoudre graphiquement le système suivant :*

$$\begin{cases} x^2+y^2-6x+5<0 \\ \sqrt{5}\,|y|<2x \end{cases}$$

Exercice 6 .

On considère les points : $A\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\dfrac{1}{2}\right)$, $B\left(\dfrac{1}{2},\dfrac{-\sqrt{3}}{2}\right)$ et $C\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{2},\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$.

1. *Vérifier que les points A et B appartiennent au cercle trigonométrique associé au repère $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$.*

2. **a)** *Vérifier que les segments $[OC]$ et $[AB]$ ont le même milieu.*

b) *Calculer :* $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{AC}$ *et* OA *et* AC.

c) *En déduire que* $OACB$ *est un carré.*

3. **a)** *Vérifier que* $\dfrac{\pi}{6}$ *est une mesure de* $\left(\widehat{\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{OA}}\right)$.

b) *Déterminer une mesure de l'angle* $\left(\widehat{\overrightarrow{OC},\,\overrightarrow{i}}\right)$.

c) *En déduire la valeur de* $\sin\dfrac{\pi}{12}$ *et* $\cos\dfrac{\pi}{12}$.

Exercice 7 .

On considère les points : $A\left(1, \dfrac{5}{2}\right)$, $B\left(1, \dfrac{-3}{2}\right)$ *et* $C\left(-1, \dfrac{1}{2}\right)$.

1. *Montrer que le triangle* ABC *est rectangle en* C.

2. **a)** *Montrer que :* $x^2+y^2-2x-y-\dfrac{11}{4}=0$ *est une équation cartésienne du cercle* (C) *circonscrit au triangle* ABC.

3. *On considère la droite* $(\Delta) : x+2y=0$.

   a) *Étudier la position relative de* (Δ) *par rapport à* (C).

4. *Résoudre graphiquement le système suivant :*

$$\begin{cases} x^2+y^2-2x-y-\dfrac{11}{4}\leq 0 \\ \\ x+2y\leq 0 \end{cases}$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com