Série d'exercices sur les polynômes

Exercice 1 .

On considère les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$$P(x) = (ax+b)\left(x^2+3x-\sqrt{5}\right) \quad et \quad Q(x) = x^3+2x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}$$

Déterminer a et b pour que les polynômes soient égaux.

Exercice 2 .

Déterminer suivant les valeurs du paramètre réel m, le dégré du polynôme $P(x)$ définie par :

$$P(x) = \left(m^2-m\right)x^3+mx^2+x+2$$

Exercice 3 .

On considère le polynôme : $P(x) = x^3-mx^2-5x+6$ (m est un pramètre réel).
Déterminer la valeur de m pour que le polynôme $P(x)$ soit divisible par $(x-1)$.

Exercice 4 .

Soit $P(x)$ le polynôme défini par : $P(x) = 2x^3+5x^2-x-6$.

1. *Montrer que -2 est une racine du polynôme $P(x)$.*
2. *Déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x+2).Q(x)$*
3. *Montrer que le polynôme $Q(x)$ est divisible par $x-1$, puis factoriser le polynôme $Q(x)$.*
4. *Déduire une factorisation du polynôme $P(x)$ en produit de 3 polynômes de degré égal à 1.*

Exercice 5 .

On considère le polynôme définie par : $P(x) = 2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1. *Vérifier que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)$.*
2. *Montrer que si α est une racine du polynôme $P(x)$, alors il en est de même $\dfrac{1}{\alpha}$.*
3. **a)** *Montrer que 2 est une racine du polynôme $P(x)$.*
   b) *En effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x-2$, déterminer le polynôme $Q(x)$ tel que : $P(x) = (x-2)Q(x)$.*
   c) *Déduire que : $Q\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.*

4. **a)** *Déterminer les réels* a, b *et* c *tels que :* $Q(x) = \left(x - \dfrac{1}{2}\right)(ax^2 + bx + c)$.

   b) *Déduire une factorisation du polynôme* $P(x)$ *en produit de* 4 *polynômes de degré égal à* 1.

Exercice 6 .

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax - b$ *tels que* a *et* b *deux réels.*

1. *Déterminer* a *et* b *pour que les conditions suivantes soient vérifiées :*

   ♣ *Le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $(x-2)$.

   ♣ *Le reste de la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x-1)$ *est* -12.

2. *On prend :* $a = -11$ *et* $b = 6$.

   a) *Effectuer la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x-2)$.

   b) *Déduire une factorisation du polynôme* $P(x)$ *en produit de* 3 *polynômes de degré égal à* 1.

Exercice 7 .

On considère le polynôme : $P(x) = x^3 - 3x + 2$.

1. **a)** *Calculer* $P(1)$ *puis déduire un polynôme* $Q(x)$ *tel que :* $P(x) = (x-1)Q(x)$.

   b) *Vérifier que :* $P(x) = (x+2)(x-1)^2$.

2. *Soit* α *un réel tel que* $1 < \alpha < 2$.

   Encadrer $\alpha + 2$ *et* $(\alpha - 1)^2$, *puis déduire que :* $0 < \dfrac{P(\alpha)}{4} < 1$.

Exercice 8 .

On considère le polynôme : $P(x) = -6x^4 + 5x^3 + 38x^2 + 5x - 6$.

1. *Vérifier que* 3 *et* $\dfrac{-1}{2}$ *sont deux racines du polynôme* $P(x)$.

2. *Montrer que si* a *est une racine du polynôme* $P(x)$, *alors il en est de même* $\dfrac{1}{a}$.

3. *Déduire les racines du polynôme* $P(x)$.

Exercice 9 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. *Soit le polynôme :* $P(x) = (x-2)^{3n} + (x-1)^{2n} - 1$.

1. *Montrer l'existence d'un polynôme* $Q(x)$ *tel que :* $P(x) = (x-2)Q(x)$. *et déterminer le degré de* $Q(x)$.

2. *Calculer* $P(1)$ *en fonction de* n,*puis déterminer les valeurs de* n *pour lesquelles le polynome* $P(x)$ *soit divisible par* $x - 1$.

Exercice 10 .

On considère les deux polynômes :

$$P(x) = x^3 - 6x + 5 \quad et \quad Q(x) = x^3 + (m-1)x^2 - (m+2)x + (3-m). \quad (m \text{ est un paramètre réel}).$$

1. *Déterminer le reste et le quotient de la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par $(x-1)$.*

2. *Déterminer m sachant que $P(x) + Q(x)$ est divisible par $(x-1)$.*

Exercice 11 .

On considère le polynôme $P(x) = nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1$.

1. *Montrer que 1 est une racine du polynôme $P(x)$.*

2. *Montrer que : $P(x) = (x-1)(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} ... - 1)$*

3. *Montrer que : $P(2) = 2^n(n-1) + 1$.*

4. *Déterminer la valeur de la somme $S = 2 + 2^2 + ... + 2^n$.*

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**