Devoir Surveillé N1

Durée 2H

Exercice 1 (4 *pts*)

1. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,,\ \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$ *et* $\forall\,(a,b) \in ([0,+\infty[)^2\,,\ a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

2. *On considère l'assertion suivante :* $P:\ (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\exists x \in \mathbb{R})\,,\ \dfrac{2x}{1+x^2} > \sqrt{y}$.

   a) *Donner la négation de* P.

   b) *Montrer que* P *est fausse.*

3. *Donner la négation des assertions suivantes :*

   $R : (\forall x \in \mathbb{R})\,(\exists k \in \mathbb{Z})\,,\ k \leq x < x{+}1$ *et* $F : \forall\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \ (\alpha-\beta > 1 \implies \exists n \in \mathbb{Z}, \alpha < n < \beta)$

Exercice 2 (6 *pts*)

1. *Montrer que :* $\forall\,(a,b) \in (]0,+\infty[)^2\,,\ \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}$.

2. *Montrer que :* $\sqrt{2}+\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3. *Montrer par la contraposée que :* $(\forall n \in \mathbb{N})\,,\ \dfrac{n^2}{5} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{5} \in \mathbb{N}$

4. *Soient* a, b, x *et* y *des réels non nuls. Montrer que :* $ax+by=1 \implies \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$.

Exercice 3 (5 *pts*)

1. *Montrer que :* $(\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}(x+2) > 0$.

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'équation suivante* $(E) : 3-2\,|x-4| = 2x+5$.

3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$. *On pose :* $S_n = 1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+...+\dfrac{1}{3^n}$.

   a) *Calculer* S_1 , S_2 *et* S_3.

   b) *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ \ S_n = \dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2\times 3^n}$.

Exercice 4 (5 *pts*)

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$f(x) = \sqrt{2x^2-3x+1} \quad , \quad g(x) = \frac{1}{|x+2|-|x+1|} \quad \text{et} \quad h(x) = \frac{x-1}{x^2+2x-3}$$