Professeur : Yahya MATIOUI

Correction de la série

Exercice 1 .

On considère les deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ tels que :

$$P(x) = (ax+b)\left(x^2+3x-\sqrt{5}\right) \quad et \quad Q(x) = x^3+2x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}$$

On cherche a et b :

$$P(x) = Q(x) \quad éq: \quad (ax+b)\left(x^2+3x-\sqrt{5}\right) = x^3+2x^2-\left(3+\sqrt{5}\right)x+\sqrt{5}$$

On écrit le polynôme $P(x)$ sous la forme réduite.

$$\begin{aligned} P(x) &= (ax+b)\left(x^2+3x-\sqrt{5}\right) \\ &= ax^3+3ax^2-a\sqrt{5}x+bx^2+3bx-b\sqrt{5} \\ &= ax^3+(3a+b)x^2+\left(-a\sqrt{5}+3b\right)x-b\sqrt{5} \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
P(x) &= Q(x) \\
\text{éq} &: \; ax^3 + (3a+b)x^2 + \left(-a\sqrt{5} + 3b\right)x - b\sqrt{5} = x^3 + 2x^2 - \left(3+\sqrt{5}\right)x + \sqrt{5} \\
\text{éq} &: \; \begin{cases} a = 1 \\ 3a + b = 2 \\ -a\sqrt{5} + 3b = -\left(3+\sqrt{5}\right) \\ -b\sqrt{5} = \sqrt{5} \end{cases} \\
\text{éq} &: \; \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 - 3 \\ 3b = -\left(3+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \\ b = \dfrac{\sqrt{5}}{-\sqrt{5}} \end{cases} \\
\text{éq} &: \; \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \\ -3b = -\left(3+\sqrt{5}\right) + \sqrt{5} \\ b = -1 \end{cases} \\
\text{éq} &: \; \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Donc les polynômes $P(x)$ et $Q(x)$ sont égaux si et seulement si $a = 1$ et $b = -1$.

Exercice 2 .

On considère le polynôme $P(x) = (m^2 - m)x^3 + mx^2 + x + 2$.
On cherche le degré de $P(x)$ suivant les valeurs de m :

♣ Si $m^2 - m \neq 0$, *alors*

$$m^2 - m \neq 0 \;\; \text{éq} : \; m(m-1) \neq 0 \;\; \text{éq} : \; m \neq 0 \text{ et } m - 1 \neq 0 \;\; \text{éq} : \; m \neq 0 \text{ et } m \neq 1$$

Donc si $m \neq 0$ et $m \neq 1$ alors le degré du polynôme $P(x)$ est 3.

♣ Si $m = 0$ *alors le degré du polynôme $P(x)$ est* 1.

♣ Si $m = 1$ *alors le degré du polynôme $P(x)$ est* 2.

Exercice 3 .

On considère le polynôme : $P(x) = x^2 - mx^2 - 5x + 6$ *(m est un paramètre réel).*

On cherche m

Soit $m \in \mathbb{R}$.

Le polynôme $P(x)$ *est divisible par* $(x-1)$ *si et seulement si le reste de la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x-1)$ *est mul c'est-à-dire* $P(1) = 0$.

Donc

$$P(1) = 0 \quad \acute{e}q : 1 - m - 5 + 6 = 0 \quad \acute{e}q : m = 2$$

D'où le polynôme $P(x)$ *est divisible par* $(x-1)$ *si et seulement si* $m = 2$.

Exercice 4 .

Soit $P(x)$ *le polynôme défini par :* $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$.

1. *Montrons que* -2 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

   Calculons $P(-2)$.

   On a

   $$P(-2) = 2 \times (-2)^3 + 5 \times (-2)^2 - (-2) - 6 = 0$$

   donc -2 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

2. *On cherche le polynôme* $Q(x)$ *tel que :* $P(x) = (x+2).Q(x)$.

   On a 2 *est une racine du polynôme* $P(x)$*, donc le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $x-2$*, et on déduit qu'il existe un polynôme* $Q(x)$ *tel que :*

   $$P(x) = (x-2)\,Q(x)$$

   On a $\deg(P(x)) = 3$ *donc le degré du polynôme* $Q(x)$ *est* 2*, d'où* $Q(x) = ax^2 + bx + c$ *avec* $a \neq 0$*. Donc*

   $$\begin{aligned} P(x) &= (x+2)\left(ax^2 + bx + c\right) \\ &= ax^3 + bx^2 + cx + 2ax^2 + 2bx + 2c \\ &= ax^3 + (b+2a)\,x^2 + (c+2b)\,x + 2c \end{aligned}$$

   et comme $P(x) = 2x^3 + 5x^2 - x - 6$*, alors d'après l'égalité de deux polynômes on obtient*

   $$\begin{cases} a = 2 \\ b + 2a = 5 \\ c + 2b = -1 \\ 2c = -6 \end{cases} \acute{e}q : \begin{cases} a = 2 \\ b = 5 - 2 \times 2 \\ c = -1 - 2b \\ c = \dfrac{-6}{2} \end{cases} \acute{e}q : \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -1 - 2 \times 1 \\ c = -3 \end{cases} \acute{e}q : \begin{cases} a = 2 \\ b = 1 \\ c = -3 \end{cases}$$

   donc $Q(x) = 2x^2 + x - 3$ *d'où*

   $$P(x) = (x+2)\left(2x^2 + x - 3\right)$$

3. ♣ *Montrons que $Q(x)$ est divisible par $x-1$.*

On a $Q(1) = 2+1-3 = 0$. Donc 1 est une racine du polynôme $Q(x)$ .D'où le polynôme $Q(x)$ est divisible par $x-1$, et on déduit qu'il existe un polynôme $R(x)$ tel que :

$$Q(x) = (x-1).R(x)$$

♣ *On factorise le polynôme $Q(x)$:*

On a le degré du polynôme $P(x)$ est 2 donc le degré du polynôme $R(x)$ est 1. D'où $R(x) = ax+b$ avec $a \neq 0$. Donc

$$\begin{aligned} Q(x) &= (x-1)(ax+b) \\ &= ax^2+bx-ax-b \\ &= ax^2+(b-a)x-b \end{aligned}$$

et comme $Q(x) = 2x^2+x-3$, alors d'après l'égalité de deux polynômes on obtient

$$\begin{cases} a = 2 \\ b-a = 1 \\ -b = -3 \end{cases} \quad \text{éq :} \begin{cases} a = 2 \\ b = 1+2 \\ b = 3 \end{cases} \quad \text{éq :} \begin{cases} a = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

donc $R(x) = 2x+3$, d'où

$$Q(x) = (x-1)(2x+3)$$

4. *On déduit une factorisation du polynôme $P(x)$ en produit de 3 polynômes de degré 1.*

On a $Q(x) = (x-1)(2x+3)$ et comme $P(x) = (x+2)Q(x)$ donc

$$P(x) = (x+2)(x-1)(2x+3)$$

Exercice 5 .

On considère le polynôme défini par $P(x) = 2x^4-9x^3+14x^2-9x+2$

1. *Vérifions que 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)$:*

Calculons $P(0)$:

$$P(0) = 2\times 0 - 9\times 0 + 14\times 0 - 9\times 0 + 2 = 2 \neq 0$$

donc 0 n'est pas une racine du polynôme $P(x)$.

2. *Montrons que si α est une racine du polynôme $P(x)$, alors il en est de même $\dfrac{1}{\alpha}$.*

On suppose que α est une racine du polynôme $P(x)$, montrons que $\dfrac{1}{\alpha}$ est une racine du polynôme $P(x)$:

On a α est une racine du polynôme $P(x)$ avec $\alpha \neq 0$ (car 0 n'est pas une racine de $P(x)$).
Ceci signifie que :

$$P(\alpha) = 0 \quad \text{éq} : \; 2\alpha^4 - 9\alpha^3 + 14\alpha^2 - 9\alpha + 2 = 0$$

On a

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{\alpha}\right) &= 2\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 - 9\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 + 14\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - 9 \times \frac{1}{\alpha} + 2 \\ &= \frac{2}{\alpha^4} - \frac{9}{\alpha^3} + \frac{14}{\alpha^2} - \frac{9}{\alpha} + 2 \\ &= \frac{2 - 9\alpha + 14\alpha^2 - 9\alpha^3 + 2\alpha^4}{\alpha^4} \\ &= \frac{0}{\alpha^4} \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc $\frac{1}{\alpha}$ est une racine du polynôme $P(x)$. D'où si α est une racine du polynôme $P(x)$, alors il en est de même $\frac{1}{\alpha}$.

3. **a)** *Montrons que 2 est une racine du polynôme $P(x)$.*
Calculons $P(2)$:

$$\begin{aligned} P(2) &= 2 \times (2)^4 - 9 \times (2)^3 + 14 \times (2)^2 - 9 \times 2 + 2 \\ &= 32 - 72 + 56 - 18 + 2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc 2 est une racine du polynôme $P(x)$.

b) *En effectuant la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $x - 2$, on obtient le polynôme $Q(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$. Donc*

$$P(x) = (x-2).Q(x)$$

c) *On déduit que : $Q\left(\frac{1}{2}\right) = 0$.*
On a $P(x) = (x-2).Q(x)$ donc

$$P\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2} - 2\right).Q\left(\frac{1}{2}\right) \qquad (*)$$

on sait que 2 est une racine du polynôme $P(x)$ alors d'après la question 2/ on obtient que $\frac{1}{2}$ soit aussi racine du polynôme $P(x)$. C'est-à-dire $P\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ donc *d'après* $(*)$ *on obtient*

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2}-2\right).Q\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \text{éq} \quad : \quad \frac{-3}{2}.Q\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \\ \text{éq} \quad : \quad Q\left(\frac{1}{2}\right) &= 0 \end{aligned}$$

Donc $Q\left(\frac{1}{2}\right)=0$.

4. **a)** *On cherche* a, b *et* c *tels que :* $Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)(ax^2+bx+c)$

On a

$$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+\left(b-\frac{1}{2}a\right)x^2+\left(c-\frac{1}{2}b\right)x-\frac{1}{2}c$$

et comme $Q(x)=2x^3-5x^2+4x-1$, *d'après l'égalité de deux polynômes on obtient le système suivant*

$$: \begin{cases} a=2 \\ b-\frac{1}{2}a=-5 \\ c-\frac{1}{2}b=4 \\ \frac{-1}{2}c=-1 \end{cases} \quad \text{éq} : \begin{cases} a=2 \\ b-\frac{1}{2}\times 2=-5 \\ c=4+\frac{1}{2}b \\ c=2 \end{cases} \quad \text{éq} : \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=4+\frac{1}{2}\times(-4) \\ c=2 \end{cases} \quad \text{éq} : \begin{cases} a=2 \\ b=-4 \\ c=2 \end{cases}$$

Donc

$$Q(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right)$$

b) *On déduit une factorisation du polynôme* $P(x)$ *:*

On a d'après la question $4-a/$ *que :*

$$\begin{aligned} Q(x) &= \left(x-\frac{1}{2}\right)\left(2x^2-4x+2\right) \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x^2-2x+1\right) \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)^2 \\ &= 2\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1) \end{aligned}$$

et comme $P(x) = (x-2)\,Q(x)$ *alors*

$$P(x) = 2(x-2)\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-1)(x-1)$$

Exercice 6 .

On considère le polynôme $P(x) = 2x^3 + 3x^2 + ax - b$ *tels que :* a *et* b *deux réels.*

1. *On cherche* a *et* b :

   ♣ *Le polynôme* $P(x)$ *est divisible par* $(x-2)$ *si et seulement si* $P(2) = 0$ *c'est-à-dire*

   $$28 + 2a - b = 0 \quad (1)$$

   ♣ *Le reste de la division euclidienne du polynôme* $P(x)$ *par* $(x-1)$ *est* -12*, ceci signifie que* $P(1) = -12$*, c'est-à-dire*

   $$5 + a - b = -12 \quad (2)$$

   D'après (1) *et* (2) *on déduit le système suivant :*

   $$\begin{cases} 28 + 2a - b = 0 \\ \\ 5 + a - b = -12 \end{cases} \quad \textit{éq} : \quad \begin{cases} 28 + 2a - b = 0 & (1) \\ \\ -10 - 2a + 2b = 24 & (2) \end{cases}$$

   On fait la somme de l'équation (1) *et* (2) :

   $$\begin{array}{rcl} (28 + 2a - b) + (-10 - 2a + 2b) & = & 24 \\ \textit{éq} & : & 18 + b = 24 \\ \textit{éq} & : & b = 24 - 18 \\ \textit{éq} & : & b = 6 \end{array}$$

   on remplace b *par* 6 *dans l'équation* (1)*, et on obtient on obtient :*

   $$\begin{array}{rcl} 28 + 2a - b & = & 0 \\ \textit{éq} & : & 28 + 2a - 6 = 0 \\ \textit{éq} & : & 22 + 2a = 0 \\ \textit{éq} & : & 2a = -22 \\ \textit{éq} & : & a = \dfrac{-22}{2} \\ \textit{éq} & : & a = -11 \end{array}$$

   Donc $a = -11$ *et* $b = 6$*. D'où les deux conditions sont vérifiées si et seulement si* $a = -11$ *et* $b = 6$.

2. *On prend :* $a = -11$ *et* $b = 6$.

a) *On effectue la division euclidienne du polynôme $P(x)$ par $(x-2)$. On obtient :*

$$P(x) = (x-2)\left(2x^2+7x+3\right)$$

b) *On déduit une factorisation du polynôme $P(x)$.*

On a $P(x) = (x-2)(2x^2+7x+3)$.

Comme

$$\begin{aligned} 2x^2+7x+3 &= 2x^2+6x+x+3 \\ &= 2x(x+3)+x+3 \\ &= (x+2)(2x+3) \end{aligned}$$

alors

$$P(x) = (x-2)(x+2)(2x+3)$$

Exercice 7 *.*

On considère le polynôme $P(x) = x^3-3x+2$.

1. **a)** *Calculons $P(1)$.*

$$P(1) = 1^3 - 3\times 1 + 2 = 0$$

alors 1 est une racine du polynôme $P(x)$, donc le polynôme est divisible par $(x-1)$ et on déduit qu'il existe un polynôme $Q(x)$ tel que :

$$P(x) = (x-1).Q(x)$$

b) *Vérifions que : $P(x) = (x+2)(x-1)^2$.*

On a

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3-3x+2 \\ &= x^3-3x+3-1 \\ &= x^3-1-3x+3 \\ &= (x-1)\left(x^2+x+1\right)-3(x-1) \\ &= (x-1)\left(x^2+x+1-3\right) \\ &= (x-1)\left(x^2+x-2\right) \\ &= (x-1)\left(x^2+2\times\frac{1}{2}x-2\right) \\ &= (x-1)\left(x^2+2\times\frac{1}{2}x+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2-2\right) \\ &= (x-1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right) \\ &= (x-1)\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3^2}{2^2}\right) \\ &= (x-1)\left(x+\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\right) \\ &= (x-1)(x+2)(x-1) \\ &= (x-1)^2(x+2) \end{aligned}$$

donc

$$P(x) = (x-1)^2 (x+2)$$

2. *Soit* α *un réel tel que :* $1 < \alpha < 2$.

   ♣ *On encadre* $\alpha + 2$, $(\alpha - 1)^2$.

   On a : $1 < \alpha < 2$ *alors* $3 < \alpha + 2 < 4$ *et* $0 < \alpha - 1 < 1$ *donc*

   $$3 < \alpha + 2 < 4 \quad et \quad 0 < (\alpha-1)^2 < 1$$

   ♣ *On déduit que :* $0 < \dfrac{P(\alpha)}{4} < 1$.

   On a $3 < \alpha + 2 < 4$ *et* $0 < (\alpha-1)^2 < 1$ *alors*

   $$0 < (\alpha+2)(\alpha-1)^2 < 4$$

   comme $P(\alpha) = (\alpha+2)(\alpha-1)^2$ *donc :* $0 < P(\alpha) < 4$ *d'où*

   $$0 < \frac{P(\alpha)}{4} < 1.$$

Exercice 8 .

On considère le polynôme : $P(x) = -6x^4 + 5x^3 + 38x^2 + 5x - 6$.

1. *Vérifions que* 3 *et* $\dfrac{-1}{2}$ *sont deux racines du polynôme* $P(x)$:

   On a

   $$P(3) = -6 \times 3^4 + 5 \times 3^3 + 38 \times 3^2 + 5 \times 3 - 6 = 0$$

   donc 3 *est une racine du polynôme* $P(x)$.

   D'autre part, on a

   $$P\left(\frac{-1}{2}\right) = -6 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^4 + 5 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 38 \times \left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 5 \times \left(\frac{-1}{2}\right) - 6 = 0$$

   donc $-\dfrac{1}{2}$ *est une racine du polynôme* $P(x)$.

2. *Montrons que si* a *est une racine du polynôme* $P(x)$, *alors il en est de même* $\dfrac{1}{a}$.

   On suppose que a *est une racine du polynôme* $P(x)$, *montrons que* $\dfrac{1}{a}$ *est une racine du polynôme* $P(x)$:

   On a a *est une racine du polynôme* $P(x)$ *avec* $a \neq 0$ (*car* 0 *n'est pas une racine de* $P(x)$).
   Ceci signifie que :

   $$P(a) = 0 \quad éq : -6a^4 + 5a^3 + 38a^2 + 5a - 6 = 0$$

On a

$$\begin{array}{rcl} P\left(\frac{1}{a}\right) & = & -6\times\left(\frac{1}{a}\right)^4+5\times\left(\frac{1}{a}\right)^3+38\times\left(\frac{1}{a}\right)^2+5\times\frac{1}{a}-6 \\ & = & \frac{-6}{a^4}+\frac{5}{a^3}+\frac{38}{a^2}+\frac{5}{a}-6 \\ & = & \frac{-6+5a+38a^2+5a^3-6a^4}{a^4} \\ & = & \frac{0}{a^4} \\ & = & 0 \end{array}$$

donc $\frac{1}{a}$ *est une racine du polynôme* $P(x)$. *D'où si* a *est une racine du polynôme* $P(x)$, *alors il en est de même* $\frac{1}{a}$.

3. *On déduit les racine des polynômes* $P(x)$.

   On a 3 *et* $\frac{-1}{2}$ *sont deux racines du polynôme* $P(x)$, *alors d'après la question précédente on déduit que* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{-1}{\frac{-1}{2}}$ *sont deux racines du polynômes* $P(x)$. *Ceci signifie que les racines du polynômes* $P(x)$ *sont* : 3, $\frac{-1}{2}$, $\frac{1}{3}$ *et* -2.

Exercice 9 .

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. *Soit le polynôme* $P(x)=(x-2)^{3n}+(x-1)^{2n}-1$.

1. *Montrons l'existence d'un polynôme* $Q(x)$ *tel que* : $P(x)=(x-2)\,Q(x)$.

   On a $P(2)=(2-2)^{3n}+(2-1)^{2n}-1=1-1=0$. *Donc* 2 *est une racine du polynôme* $P(x)$, *et on déduit l'existence du polynôme* $Q(x)$ *tel que* :

$$P(x)=(x-2)\,Q(x).$$

♣ *On cherche* $\deg(Q(x))$:

On a $\deg(P(x))=3n$ *donc*

$$\deg(Q(x))=3n-1$$

2. ♣ *Calculons* $P(1)$:

$$\begin{array}{rcl} P(1) & = & (1-2)^{3n}+(1-1)^{2n}-1 \\ & = & (-1)^{3n}-1 \\ & = & (-1)^{n}-1 \end{array}$$

♣ *On cherche les valeurs de n pour lesquelles $P(x)$ est divisible par $(x-1)$.*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-1)$ si et seulement si $P(1)=0$ et comme $P(1)=(-1)^n-1$ donc

$$(-1)^n - 1 = 0 \ \text{éq}: \ n = 2k \ / \ k \in \mathbb{N}^*$$

Donc le polynôme $P(x)$ est divisible par $(x-1)$ si et seulement si $n=2k$ avec $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 10 .

On considère les deux polynômes :

$P(x) = x^3-6x+5$ *et* $Q(x) = x^3+(m-1)x^2-(m+2)x+(3-m)$. ($m$ *est un paramètre réel*)

1. *En effectuant la division euclidienne du polynôme $Q(x)$ par $(x-1)$, on obtient les polynômes $S(x)$ et $R(x)$ le quotient et le reste de la division euclidienne :*

$$S(x) = x^2+mx-2 \quad \text{et} \quad R(x) = P(1) = 1-m$$

2. *On cherche m sachant que $(P+Q)(x)$ est divisible par $(x-1)$.*

   Soit $m \in \mathbb{R}$.

   Le polynôme $(P+Q)(x)$ est divisible par $(x-1)$ si et seulement si $(P+Q)(1)=0$.

   On écrit le polynôme $(P+Q)(x)$ sous la forme réduite :

$$\begin{aligned}
(P+Q)(x) &= P(x)+Q(x) \\
&= x^3-6x+5+x^3+(m-1)x^2-(m+2)x+(3-m) \\
&= 2x^3+(m-1)x^2+(-6-(m+2))x+5+(3-m) \\
&= 2x^3+(m-1)x^2+(-m-8)x+8-m \\
&= 2x^3+(m-1)x^2-(m+8)x+8-m
\end{aligned}$$

   Donc

$$\begin{aligned}
(P+Q)(1) &= 0 \\
\text{éq} &: 2+(m-1)-(m+8)+8-m=0 \\
\text{éq} &: 2+m-1-m-8+8-m=0 \\
\text{éq} &: 1-m=0 \\
\text{éq} &: m=1
\end{aligned}$$

   D'où le polynôme $(P+Q)(x)$ est divisible par $(x-1)$ si et seulement si $m=1$.

Exercice 11 .

On considère le polynôme : $P(x) = nx^{n+1}-(n+1)x^n+1$.

1. *Montrons que* 1 *est une racine du polynôme* $P(x)$:
   Calculons $P(1)$.
   $$P(1) = n - (n+1) + 1 = n - n - 1 + 1 = 0$$
   donc 1 *est une racine du polynôme* $P(x)$.
2. *Montrons que* : $P(x) = (x-1) . (nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} ... - 1)$.
   On a
   $$\begin{aligned} (x-1) . \left(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} ... - 1\right) &= nx^{n+1} - x^n - x^{n-1} ... - x - nx^n + x^{n-1} + x^{n-2} ... + 1 \\ &= nx^{n+1} - nx^n - x^n + 1 \\ &= nx^{n+1} - (n+1) x^n + 1 \\ &= P(x) \end{aligned}$$
   Donc
   $$P(x) = (x-1) . \left(nx^n - x^{n-1} - x^{n-2} ... - 1\right)$$
3. *Montrons que* : $P(2) = 2^n (n-1) + 1$.
   On a
   $$\begin{aligned} P(2) &= n2^{n+1} - (n+1) 2^n + 1 \\ &= 2^{n+1} n - 2^n n - 2^n + 1 \\ &= 2^n (2n - n - 1) + 1 \\ &= 2^n (n-1) + 1 \end{aligned}$$
   donc : $P(2) = 2^n (n-1) + 1$.
4. *On cherche la valeur de la somme* : $S = 2 + 2^2 + ... + 2^n$.
   On a $P(2) = 2^n (n-1) + 1$, *et d'après la question 2/ on obtient* :
   $$P(2) = 2^n n - 2^{n-1} - 2^{n-2} ... - 1$$
   donc
   $$\begin{aligned} 2^n (n-1) + 1 &= 2^n n - 2^{n-1} - 2^{n-2} ... - 1 \\ \text{\'eq} &: 2^n n - 2^n + 1 = 2^n n - 2^{n-1} - 2^{n-2} ... - 1 \\ \text{\'eq} &: -2^n + 1 = -2^{n-1} - 2^{n-2} ... - 1 \\ \text{\'eq} &: -2^n + 2 - 2^n = -2^n - 2^{n-1} - 2^{n-2} ... - 2 \\ \text{\'eq} &: -2^n + 2 - 2^n = -\left(\underbrace{2^n + 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2}_{=S}\right) \\ \text{\'eq} &: -2.2^n + 2 = -S \\ \text{\'eq} &: -2^{n+1} + 2 = -S \\ \text{\'eq} &: S = 2^{n+1} - 2 \end{aligned}$$
   D'où
   $$S = 2^{n+1} - 2$$

Pr : **Yahya MATIOUI**