Correction du devoir surveillé

Exercice 1 (4 *pts*)

1. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,,\ \dfrac{2x}{1+x^2} \leq 1$ *et* $\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2\,,\ a+b \geq 2\sqrt{ab}$.

   ♣ *Soit* $x \in \mathbb{R}^+$.

   $$\frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \iff 2x \leq 1+x^2 \iff 0 \leq x^2-2x+1 \iff 0 \leq (x-1)^2$$

   comme $0 \leq (x-1)^2$ *est une assertion vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$. *Donc*

   $$\left(\forall x \in \mathbb{R}^+\right), \frac{2x}{1+x^2} \leq 1$$

   ♣ *Soit* $(a,b) \in ([0,+\infty[)^2$.

   $$a+b \geq 2\sqrt{ab} \iff \sqrt{a^2}-2\sqrt{ab}+\sqrt{b^2} \geq 0 \iff \left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$$

   comme $\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2 \geq 0$ *est une assertion vraie pour tous* $a,b \in \mathbb{R}^+$. *Donc*

   $$\forall (a,b) \in ([0,+\infty[)^2\,, a+b \geq 2\sqrt{ab}.$$

2. *On considère l'assertion suivante :* $P : (\forall y \in \mathbb{R}^+)\ (\exists x \in \mathbb{R})\,,\ \dfrac{2x}{1+x^2} > \sqrt{y}$.

   a) *La négation de l'assertion* P.

   $$\overline{P} : \left(\exists y \in \mathbb{R}^+\right)\ \ (\forall x \in \mathbb{R})\,,\ \frac{2x}{1+x^2} \leq \sqrt{y}.$$

   b) *Montrons que* P *est fausse.*

   On peut prendre $y=1$ *tel que l'assertion* $\dfrac{2x}{1+x^2} \leq \sqrt{1}$ *est vraie pour tout* $x \in \mathbb{R}$.
   Ceci signifie que l'assertion $\overline{P}$ *est vraie ce qui entraine que l'assertion* P *est fausse.*

3. *La négation des assertions* R *et* F *:*

   ♣ *La négation de l'assertion* R *est :* $\overline{R} : (\exists x \in \mathbb{R})\,(\forall k \in \mathbb{Z})\,,\ k > x$ *ou* $x \geq x+1$.

   ♣ *La négation de l'assertion* F *est :* $\overline{F} : \exists\,(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2,\ \alpha-\beta > 1$ *et* $(\forall n \in \mathbb{Z}, \alpha \geq n$ *ou* $n \geq \beta)$.

Exercice 2 (6 *pts*)

1. *Montrons que :* $\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2\,,\ \dfrac{a^2}{a+b} \geq \dfrac{3a-b}{4}.$

   Soit $(a,b) \in (]0,+\infty[)^2\,.$

$$\begin{aligned}\frac{a^2}{a+b} \quad \geq \quad \frac{3a-b}{4} &\iff \frac{a^2}{a+b} - \frac{3a-b}{4} \geq 0\\ &\iff \frac{4a^2-3a^2-3ab+ab+b^2}{4(a+b)} \geq 0\\ &\iff \frac{a^2-2ab+b^2}{4(a+b)} \geq 0\\ &\iff \frac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0\end{aligned}$$

   comme $\dfrac{(a-b)^2}{4(a+b)} \geq 0$ *est une assertion vraie pour tous* $a,b \in\,]0,+\infty[\,,$ *donc*

$$\forall (a,b) \in (]0,+\infty[)^2\,, \frac{a^2}{a+b} \geq \frac{3a-b}{4}.$$

2. *Montrons que :* $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \notin \mathbb{Q}.$

   On suppose par l'absurde que $\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \in \mathbb{Q}$*, alors il existe* $(p,q) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^*$ *tel que*

$$\sqrt{2}+\sqrt{3} = \frac{p}{q}$$

   alors

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2$$

   c'est-à-dire

$$5+2\sqrt{6} = \frac{p^2}{q^2}$$

   par suite

$$2\sqrt{6} = \frac{p^2-5q^2}{q^2}$$

   donc $\sqrt{6} = \dfrac{p^2-5q^2}{2q^2} \in \mathbb{Q}$*. C'est une contradiction car* $\sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$*. On conclut que*

$$\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right) \notin \mathbb{Q}.$$

3. Montrons par la contraposée que : $(\forall n \in \mathbb{N}),\ \dfrac{n^2}{5} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{5} \in \mathbb{N}.$

Soit $n \in \mathbb{N}$.

L'assertion : $\dfrac{n^2}{5} \in \mathbb{N} \implies \dfrac{n}{5} \in \mathbb{N}$ *est équivalente :* $\dfrac{n}{5} \notin \mathbb{N} \implies \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}.$

On suppose que $\dfrac{n}{5} \notin \mathbb{N}$. *On va distinguer* 4 *cas lorsque* $n = 5k+1$ *ou* $n = 5k+2$ *ou* $n = 5k+3$ *ou* $n = 5k+4$ *tel que* $k \in \mathbb{N}$.

♣ Si $n = 5k+1,$ *alors*

$$n^2 = (5k+1)^2 = 25k^2 + 10k + 1 = 5\left(5k^2 + 2k\right) + 1$$

On pose $p = 5k^2 + 2k \in \mathbb{N}$. *On obtient :* $n^2 = 5p + 1$. *Donc ceci signifie que* 5 *ne divise pas* n^2. $\left(\textit{c'est-à-dire : } \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}\right).$

♣ Si $n = 5k+2,$ *alors*

$$n^2 = (5k+2)^2 = 25k^2 + 20k + 4 = 5\left(5k^2 + 4k\right) + 4$$

On pose $p' = 5k^2 + 4k \in \mathbb{N}$. *On obtient :* $n^2 = 5p' + 4$. *Donc ceci signifie que* 5 *ne divise pas* n^2. $\left(\textit{c'est-à-dire : } \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}\right).$

♣ Si $n = 5k+3,$ *alors*

$$n^2 = (5k+3)^2 = 25k^2 + 30k + 9 = 25k^2 + 30k + 5 + 4 = 5\left(5k^2 + 6k + 1\right) + 4$$

On pose $p'' = 5k^2 + 6k + 1 \in \mathbb{N}$. *On obtient :* $n^2 = 5p'' + 4$. *Donc ceci signifie que* 5 *ne divise pas* n^2. $\left(\textit{c'est-à-dire : } \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}\right).$

♣ Si $n = 5k+4,$ *alors*

$$n^2 = (5k+4)^2 = 25k^2 + 40k + 16 = 25k^2 + 40k + 15 + 1 = 5\left(5k^2 + 8k + 3\right) + 1$$

On pose $p''' = 5k^2 + 8k + 3 \in \mathbb{N}$. *On obtient :* $n^2 = 5p''' + 4$. *Donc ceci signifie que* 5 *ne divise pas* n^2. $\left(\textit{c'est-à-dire : } \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}\right).$

On conclut que dans tous les deux cas $\dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}$. *Ceci signifie que :* $\dfrac{n}{5} \notin \mathbb{N} \implies \dfrac{n^2}{5} \notin \mathbb{N}.$
Donc par contraposition ceci est équivalente à :

$$(\forall n \in \mathbb{N}),\ \frac{n^2}{5} \in \mathbb{N} \implies \frac{n}{5} \in \mathbb{N}.$$

4. *Montrons que :* $ax+by=1 \implies \dfrac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2.$

On suppose que $ax+by=1$, *et on montre que :* $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2.$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2+y^2} - \left(a^2+b^2\right) &= \frac{1-\left(x^2+y^2\right)\left(a^2+b^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+y^2b^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(a^2x^2+b^2y^2+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left((ax+by)^2-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-\left(1-2axby+a^2y^2+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{1-1+2axby-a^2y^2-b^2x^2}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-\left(a^2y^2-2aybx+b^2x^2\right)}{x^2+y^2} \\
&= \frac{-\left(ay-bx\right)^2}{x^2+y^2}
\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{x^2+y^2} - (a^2+b^2) \leq 0$, *c'est-à-dire :* $\dfrac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2$. *D'où*

$$ax+by=1 \implies \frac{1}{x^2+y^2} \leq a^2+b^2.$$

Exercice 3 (5 *pts*)

1. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}),\ \sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}(x+2) > 0.$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

♣ Si $x+2 \geq 0$, *alors* $\dfrac{1}{2}(x+2) \geq 0$ *et* $\sqrt{x^2+1} > 0$ *donc* $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}(x+2) > 0$. *D'où*

$$\forall x \in [-2,+\infty[,\quad \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) > 0.$$

♣ Si $x+2 < 0$, *alors* $\dfrac{1}{2}(x+2) < 0$ *et* $\sqrt{x^2+1} > 0$. *On peut pas décider le signe de* $\sqrt{x^2+1}+\dfrac{1}{2}(x+2)$.

On a

$$\begin{aligned}
\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2) &= \frac{\left(\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)\right)\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)\right)}{\left(\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)\right)}\\
&= \frac{(x^2+1)-\frac{1}{4}(x+2)^2}{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)}\\
&= \frac{(x^2+1)-\frac{1}{4}(x^2+4x+4)}{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)}\\
&= \frac{(x^2+1)-\frac{x^2}{4}-x-1}{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)}\\
&= \frac{\frac{3x^2}{4}-x}{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)}
\end{aligned}$$

on a $x+2<0$ *alors* $x<-2$ *par suite* $x<0$ *donc* $-x>0$ *et comme* $\frac{3x^2}{4}>0$ *donc*

$$\frac{3x^2}{4}-x>0$$

D'autre part on a $\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)>0$. *Donc* $\frac{\frac{3x^2}{4}-x}{\sqrt{x^2+1}-\frac{1}{2}(x+2)}>0$ *d'où*

$$\forall x\in\,]-\infty,-2[\,,\ \sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)>0.$$

On conclut dans les deux cas que :

$$(\forall x\in\mathbb{R}),\sqrt{x^2+1}+\frac{1}{2}(x+2)>0.$$

2. *Résolvons l'équation :* $(E): 3-2|x-4|=2x+5$.
   Soit $x\in\mathbb{R}$.

♣ Si $x-4\le 0$, c'est-à-dire $x\le 4$ alors $|x-4|=-x+4$
donc

$$\begin{aligned}
(E) &\iff 3+2(x-4)=2x+5\\
&\iff 2x-2x=5+8-3\\
&\iff 0=10
\end{aligned}$$

d'où

$$S_1 = \phi$$

♣ Si $x-4 \geq 0$, c'est-à-dire $x \geq 4$ alors $|x-4| = x-4$

donc

$$\begin{aligned} (E) &\iff 3-2(x-4) = 2x+5 \\ &\iff x = \frac{3}{2} \notin [4, +\infty[. \end{aligned}$$

d'où

$$S_2 = \phi$$

Ceci signifie que l'ensemble des solutions de l'équation (E) *dans* $\mathbb{R}$ *est*

$$S = S_1 \cup S_2 = \phi$$

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On pose : $S_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}$.

Exercice 4 *1.* **a)** *Calculons* S_1, S_2 *et* S_3.

$S_1 = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$, $S_2 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} = \frac{13}{9}$ *et* $S_3 = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} = \frac{40}{27}$.

b) *Montrons que* : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$.

♣ *Pour* $n = 1$ *on a* $S_1 = \frac{4}{3}$ *et* $\frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3} = \frac{4}{3}$ *donc* $S_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^1}$. *L'égalité est vraie.*

♣ *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *On suppose que* $S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}$ *montrons que* $S_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}}$.

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \underbrace{1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + ... + \frac{1}{3^n}}_{L'hypothèse} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n} + \frac{1}{3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{3}{2 \times 3^{n+1}} + \frac{2}{2 \times 3^{n+1}} \\ &= \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^{n+1}} \end{aligned}$$

♣ *D'après le principe de récurrence on en déduit que :*

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*), S_n = \frac{3}{2} - \frac{1}{2 \times 3^n}.$$

Exercice 5 .

♣ $f(x) = \sqrt{2x^2 - 3x + 1}$.

$$D_f = \left\{x \in \mathbb{R} / \ 2x^2 - 3x + 1 \geq 0\right\}$$

Les solutions de l'équation $2x^2 - 3x + 1 = 0$ *sont* 1 *et* $\frac{1}{2}$. *Le tableau de signe de l'expression* $2x^2 - 3x + 1$:

x	$-\infty$		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$2x2 - 3x + 1$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Donc

$$D_f = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup [1, +\infty[$$

♣ $g(x) = \dfrac{1}{|x+2| - |x+1|}$.

$$D_g = \{x \in \mathbb{R} / \quad |x+2| - |x+1| \neq 0\}$$

Résolvons dans $\mathbb{R}$ *l'équation* $|x+2| - |x+1| = 0$.

$$\begin{aligned} |x+2| - |x+1| &= 0 \iff |x+2| = |x+1| \\ &\iff x+2 = x+1 \quad ou\ x+2 = -(x+1) \\ &\iff \underbrace{2=1}_{impossible} \quad ou \quad 2x = -3 \\ &\iff x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Donc

$$D_g = \left]-\infty, \frac{-3}{2}\right[\cup \left]\frac{-3}{2}, +\infty\right[$$

♣ $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2 + 2x - 3}$.

$$D_h = \left\{x \in \mathbb{R} / \ x^2 + 2x - 3 \neq 0\right\}$$

Les solutions de l'équation $x^2 + 2x - 3 = 0$ *sont* 1 *et* -3. *Donc*

$$D_h =]-\infty, -3[\cup]-3, 1[\cup]1, +\infty[$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com