Professeur : Yahya MATIOUI

Correction du devoir

Exercice 1 .

1. *On cherche le reste de la divsion euclidienne de* $P(x)$ *par* $(x-1)(x-2)$.

   Dans la division euclidienne de $P(x)$ *par* $(x-1)(x-2)$*, il existe un unique couple* $(Q(x), R(x))$ *tels que :*

$$P(x) = Q(x)(x-1)(x-2) + R(x) \quad \text{avec } \deg(R(x)) < \deg((x-1)(x-2)) = 2$$

   on remarque que $R(x)$ *est de degré au plus* 1 *et s'écrit donc* $R(x) = ax+b$*. D'où*

$$P(x) = Q(x)(x-1)(x-2) + ax + b$$

   pour $x=1$*, on obtient :* $P(1) = a+b$*. De même pour* $x=2$ *on obtient* $P(2) = 2a+b$*. D'où on trouve le système suivant :*

$$\begin{cases} P(1) = a+b \\ \\ P(2) = 2a+b \end{cases} \quad (*)$$

   D'autre part, dans la division euclidienne du polynôme $P(x)$ *par* $(x-1)$ *donne*

$$P(x) = S(x)(x-1) + 6$$

   donc $P(1) = 6$*. De même on obtient que* $P(2) = 8$*. D'oû le système* $(*)$ *devient*

$$\begin{cases} 6 = a+b \\ \\ 8 = 2a+b \end{cases} \quad \text{éq :} \begin{cases} 6 = a+b & (1) \\ \\ -8 = -2a-b & (2) \end{cases}$$

   On fait la somme de l'équation (1) *et* (2) *,on obtient*

$$-2 = -a \quad \text{éq :} \ a = 2$$

   On remplace a *par* 2 *dans la* $1^{ére}$ *équation on obtient*

$$6 = a+b \quad \text{éq :} \ 6 = 2+b \quad \text{éq :} \ b = 4$$

   Donc le reste est : $R(x) = 2x+4$.

2. *Généralisation. Si* $a \neq b$, *on cherche la division euclidienne de* $P(x)$ *par* $(x-a)(x-b)$:

Dans la division euclidienne de $P(x)$ *par* $(x-a)(x-b)$, *il existe un unique couple* $(Q(x), R(x))$ *tels que :*

$$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + R(x) \quad \textit{avec } \deg(R(x)) < \deg((x-a)(x-b)) = 2$$

on remarque que $R(x)$ *est de degré au plus* 1 *et s'écrit donc* $R(x) = \alpha x + \beta$. *D'où*

$$P(x) = Q(x)(x-a)(x-b) + \alpha x + \beta$$

pour $x = a$, *on obtient :* $P(a) = \alpha a + \beta$. *De même pour* $x = b$ *on obtient* $P(b) = \alpha b + \beta$. *D'où on trouve le système suivant :*

$$\begin{cases} P(a) = \alpha a + \beta \\ \\ P(b) = \alpha b + \beta \end{cases} \quad \textit{éq} : \begin{cases} P(a) = \alpha a + \beta & (1) \\ \\ -P(b) = -\alpha b - \beta & (2) \end{cases}$$

On fait la somme de l'équation (1) *et* (2) *,on obtient*

$$P(a) - P(b) = \alpha(a-b) \quad \textit{éq} : \alpha = \frac{P(a) - P(b)}{a-b} \quad ,(a - b \neq 0)$$

On remplace α *par* $\dfrac{P(a)-P(b)}{a-b}$ *dans la* $1^{ére}$ *équation on obtient*

$$\begin{aligned} P(a) &= \alpha a + \beta \\ \textit{éq} &: \; P(a) = a \times \frac{P(a)-P(b)}{a-b} + \beta \\ \textit{éq} &: \; \beta = P(a) - a\frac{(P(a)-P(b))}{a-b} = \frac{aP(b) - bP(a)}{a-b} \end{aligned}$$

Donc le reste est :

$$R(x) = \frac{P(a)-P(b)}{a-b}x + \frac{aP(b)-bP(a)}{a-b}$$

Exercice 2 .

On cherche a *et* b *pour que le polynôme* $P(x)$ *soit divisible par* $Q(x)$.

Le polynôme $P(x)$ *est divisible par le polynôme* $Q(x)$, *donc il existe un polynôme* $R(x)$ *tel que :* $P(x) = Q(x)R(x)$.

On remarque que $R(x)$ *est de degré* 1. $(\deg(R(x)) = \deg(P(x)) - \deg(Q(x)) = 1)$ *et s'écrit donc sous la forme*

$$R(x) = cx + d, \quad (c \neq 0)$$

Donc

$$\begin{array}{rcl} P(x) & = & Q(x)R(x) \\ \textit{éq} & : & x^3+ax+b=\left(x^2+3x-1\right)(cx+d) \\ \textit{éq} & : & ax^3+ax+b=cx^3+dx^2+3cx^2+3xd-cx-d \\ \textit{éq} & : & x^3+ax+b=cx^3+(d+3c)x^2+(3d-c)x-d \\ \textit{éq} & : & \left\{\begin{array}{c} c=1 \\ \\ d+3c=0 \\ \\ 3d-c=a \\ \\ b=-d \end{array}\right. \\ \textit{éq} & : & \left\{\begin{array}{c} c=1 \\ \\ d=-3 \\ \\ a=3d-1 \\ \\ b=3 \end{array}\right. \\ \textit{éq} & : & \left\{\begin{array}{c} c=1 \\ \\ d=-3 \\ \\ a=3\times(-3)-1=-10 \\ \\ b=3 \end{array}\right. \\ \textit{éq} & : & \left\{\begin{array}{c} a=-10 \\ b=3 \\ c=1 \\ d=-3 \end{array}\right. \end{array}$$

Donc le polynome $P(x)$ est divisible par le polynôme $Q(x)$ si et seulement si $a=-10$ et $b=3$.

Exercice 3 .

On cherche α tel que le polynôme $P(x)$ ait une racine double.

a est une racine double d'un polynôme $P(x)$ si et seulement si il existe un polynôme $Q(x)$ tel que

$$P(x)=(x-a)^2.Q(x)$$

on remarque que $R(x)$ est de degré 1 et s'écrit donc $Q(x)=cx+d$. D'où

$$P(x)=(x-a)^2(cx+d)=cx^3+(d-2a)x^2+\left(-2ad+a^2c\right)x+a^2d$$

et comme $P(x) = x^3 - 3x + \alpha$ *donc*

$$\begin{cases} c = 1 \\ d - 2a = 0 \\ -2ad + a^2c = -3 \\ a^2d = \alpha \end{cases}$$

$$\acute{e}q \ : \begin{cases} c = 1 \\ d = 2a \\ -4a^2 + a^2 = -3 \\ 2a^3 = \alpha \end{cases}$$

$$\acute{e}q \ : \begin{cases} c = 1 \\ d = 2a \\ -3a^2 = -3 \\ 2a^3 = \alpha \end{cases}$$

$$\acute{e}q \ : \begin{cases} c = 1 \\ d = 2a \\ a = 1 \ \text{ou} \ a = -1 \\ 2a^3 = \alpha \end{cases}$$

$$\acute{e}q \ : \begin{cases} c = 1 \\ d = 2 \\ a = 1 \\ \alpha = 2 \end{cases} \quad ou \quad \underbrace{\begin{cases} c = 1 \\ d = 2 \\ a = -1 \\ \alpha = -2 \end{cases}}_{impossible \ \alpha \in]0,+\infty[}$$

Donc $P(x)$ *ait une racine double si et seulement si* $\alpha = 2$.

www.etude – generale.com