

## Série d'exercices sur l'ordre dans $\mathbb{R}$

### Exercice 1 .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels positifs tels que :  $1 < a < b$ .  
Comparer les nombres  $A = a^2 + 1$  et  $B = ab + 2$ .

### Exercice 2 .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels strictement positifs.

Montrer que :  $\frac{7a + 2b}{7a} \geq \frac{8b}{7a + 2b}$ .

### Exercice 3 .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels non nuls. Les réels  $a$  et  $b$  ont le même signe.

Montrer que :  $(a + b) \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right) \geq 4$ .

### Exercice 4 .

Soient  $a$ ,  $b$  et  $c$  des réels.

1. Montrer que :  $a^2 + b^2 \geq 2ab$ .
2. a) Dédurre que :  $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$   
b) Dédurre que :  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq (a + b)(c + d)$ .

### Exercice 5 .

Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $2 \leq x \leq 5$  et  $-4 \leq y \leq -2$ .

Encadrer les nombres suivants :  $x \times y$  ,  $\frac{x}{y}$  et  $\frac{x^2 + y^2}{x - y}$ .

### Exercice 6 .

1. Simplifier :  $A = \sqrt{\frac{1}{(3 - \sqrt{10})^2}} - \sqrt{\frac{1}{(3 + \sqrt{10})^2}}$ .

2. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $3 < a < b$ .

Simplifier puis calculer  $E$  tel que :  $E = \sqrt{(a - b)^2} + \sqrt{(3 - a)^2} - (b - 2)$ .

3. Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $b \in [-3, -1]$  et  $a \in [-2, 5]$ .

Simplifier :

$$A = 2|2a + 7| - |3b| + 2|b + 8| - |2b - a|$$

### Exercice 7 .

Soient  $a$  et  $b$  deux réels tels que :  $|a + 2| \leq 3$  et  $-1 \leq b \leq 4$ .

1. Montrer que :  $a \in [-5, 1]$ .
2. Montrer que :  $|a + b - 1| \leq 7$ .
3. On pose :  $E = ab + 6b - 5a$ .

a) Vérifier que :  $E = (a + 6)(b - 5) + 30$

b) Déduire un encadrement pour le nombre  $E$ .

### Exercice 8 .

On pose :  $A = x + y - 6xy$ . Soient  $x$  et  $y$  deux réels de l'intervalle  $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ .

1. Montrer que :  $\frac{-1}{3} \leq 2y - \frac{1}{3} \leq \frac{1}{3}$  et  $\frac{-1}{2} \leq \frac{1}{2} - 3x \leq \frac{1}{2}$ .
2. Vérifier que :  $\left|A - \frac{1}{6}\right| = \left|\frac{1}{2} - 3x\right| \left|2y - \frac{1}{3}\right|$ .
3. Déduire que :  $A \in \left[0, \frac{1}{3}\right]$ .

### Exercice 9 .

On donne :  $|x - 1| < \frac{1}{2}$ .

1. Montrer que :  $|x^2 - 1| < \frac{5}{4}$ .
2. Montrer que :  $\frac{1}{4} < \frac{1}{2x + 1} < \frac{1}{2}$ .
3. Déduire que :  $\left|\frac{x - 1}{2x + 1}\right| < \frac{1}{4}$ .

### Exercice 10 .

Soit  $x \in \left[\frac{-1}{3}, \frac{1}{3}\right]$ .

1. Vérifier que :  $\frac{1 + x}{1 + 2x} - (1 - x) = \frac{2x^2}{1 + 2x}$ .
2. Montrer que :  $\frac{2}{1 + 2x} \leq 6$ , et déduire que :  $\left|\frac{1 + x}{1 + 2x} - (1 - x)\right| \leq 6x^2$ .
3. Déduire que  $\frac{4}{5}$  est une valeur approximative du nombre  $\frac{1,2}{1,4}$  par la précision  $2,4 \times 10^{-1}$ .

### Exercice 11 .

1. Montrer que si  $x \in [0, 1]$  alors  $\frac{1}{x + 1} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ .

2. Soient  $x$  et  $y$  deux réels tels que :  $x \in [0, 1]$  et  $y \in [0, 1]$ .

Montrer que :  $\left| \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+y} \right| \leq |x - y|$ .

3. On pose :  $0,866 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 0,867$  et  $0,707 < \frac{\sqrt{2}}{2} < 0,708$

a) Donner une approximation à  $2 \times 10^{-3}$  par excès et défaut pour le nombre :  $\left( \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$ .

b) Dédire que :  $\left| \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{1}{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}} \right| < 0,2$ .

### Exercice 12 .

On pose :  $A = \sqrt{x^2 + 1} - |x|$  et  $B = \sqrt{x^2 + 1} + |x|$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$  :  $A > 0$ . Dédire que :  $B > 2|x|$ .

2. Calculer :  $AB$  puis dédire que  $A < \frac{1}{2|x|}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

3. Dédire que :  $|x| < \sqrt{1+x^2} < |x| + \frac{1}{2|x|}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^*$ .

4. Donner un encadrement pour le nombre  $\frac{\sqrt{122}}{3}$  d'amplitude  $\frac{1}{66}$ .

### Exercice 13 .

Soit  $x$  un réel tel que  $x > 1$  on pose :  $A = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-1}}$ .

1. Montrer que :  $A - 1 = \frac{1}{\sqrt{x-1}(\sqrt{x} + \sqrt{x-1})}$ .

2. a) Vérifier que :  $2\sqrt{x-1} \leq \sqrt{x} + \sqrt{x-1} \leq 2\sqrt{x}$ .

b) Dédire que :  $\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{x-1}} \leq A - 1 \leq \frac{1}{2(x-1)}$ .

3. a) Montrer que :  $\frac{1}{x} \leq \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt{x-1}}$ .

b) Dédire que :  $1 + \frac{1}{2x} \leq A \leq \frac{1}{2(x-1)} + 1$ .

4. Dédire que le nombre  $\frac{9}{4}$  est une valeur approchée de  $\sqrt{5}$  à la précision  $\frac{1}{20}$ .

**FIN**

Pr : Yahya MATIOUI

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)