

## Série d'exercices sur la fonction partie entière

**Exercice 1** Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{\tan(\pi x)}{x - E(x)}$$

1. Déterminer  $D$  l'ensemble de définition de  $f$ .
2. Calculer  $\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{2})^-} f(x)$ .

**Exercice 2** .

1. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$f(x) = 1 - xE\left(\frac{1}{x}\right)$$

Montrer que :  $(\forall x \in \mathbb{R}^*), |f(x)| < |x|$  et en déduire que :  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

2. Soit  $g$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :  $g(x) = (\sin x) \cdot E\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**a)** Montrer que :

$$(\forall x \in ]0, \pi[), \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x} \text{ et } (\forall x \in ]-\pi, 0[), \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x.$$

**b)** Déduire  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

3. Soit  $h$  la fonction numérique définie sur  $\mathbb{R}^*$  par :

$$h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{|x|}}$$

Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0} h(x)$ .

**Exercice 3** Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \sqrt{|x| - E(x)} - x$$

1. **a)** Déterminer  $D$  l'ensemble de définition de  $f$ .

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ .

2. Soit  $k \in \mathbb{Z}$ .

a) Étudier la continuité de  $f$  à gauche et à droite au point  $x_0 = k$ .

b) Étudier la continuité de  $f$  sur l'intervalle  $]k, k + 1[$ .

**Exercice 4** Soit  $f$  la fonction numérique définie par :

$$f(x) = \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1}$$

1. Déterminer  $D$  l'ensemble de définition de  $f$ .

a) Montrer que :  $(\forall x \in D), \frac{2 - 2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2 - x}{x}$ .

b) Dédurre  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ .

**Exercice 5** .

1. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

2. Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) (\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

**FIN**

Pr : Yahya MATIOUI

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)