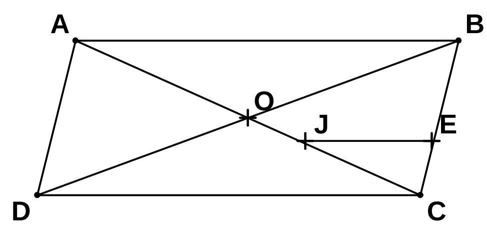
Correction de la série

Exercice 1 .

$ABCD$ est un parallèlogramme de centre O. Soit J un point du plan tel que : $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

♣ *E est le projeté du point J sur (BC) parallèlement à (AB).*



1. *Montrons que :* $\overrightarrow{CE} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$.

   On considère la projection sur la droite (BC) parallèlement à (AB).

   On a $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$, *et :* $\begin{cases} p(A) = B \\ p(J) = E \\ p(C) = C \end{cases}$

   comme la projection conserve le coefficient de colinéarité donc : $\overrightarrow{BE} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

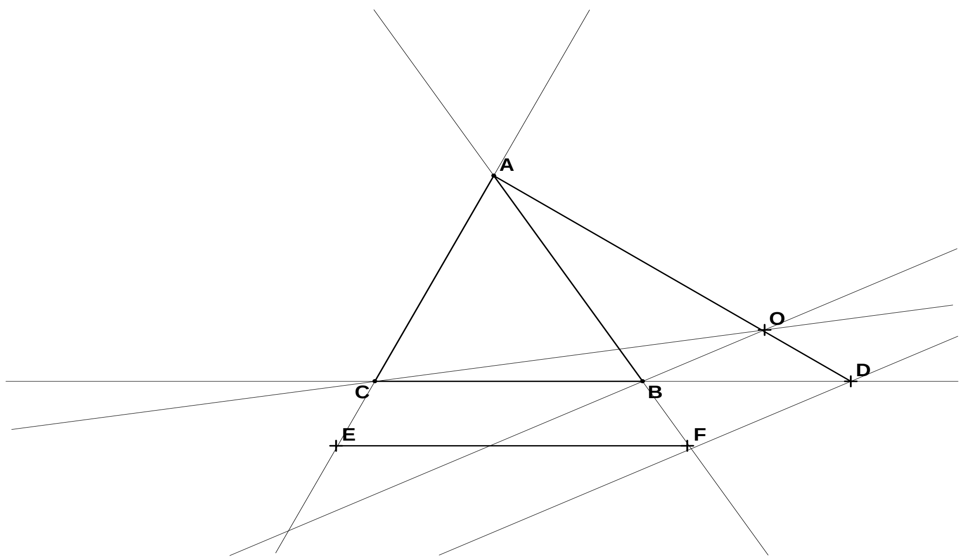
   D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BE} \\ &= \overrightarrow{CB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= -\overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{BC}\left(-1 + \frac{2}{3}\right) \\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ &= \frac{1}{3}\overrightarrow{CB} \end{aligned}$$

2. *Montrons que :* $\overrightarrow{JE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{JE} & = & \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AE}\\ & = & -\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AE}\\ & = & -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}\\ & = & \overrightarrow{AC}\left(\frac{-2}{3}+1\right)+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\\ & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}\right)\\ & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{array}$$

Exercice 2 .



1. *Montrons que :* $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AB}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$.

♣ *On considère la projection sur* (AC) *parallèlement à* (OC).

On a $\overrightarrow{AO}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$ *et* $\left\{\begin{array}{l}p(A)=A\\ \\ p(O)=C\\ \\ p(D)=E\end{array}\right.$

et comme la projection conserve le coefficient de colinéarité donc : $\overrightarrow{AC}=\frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$.

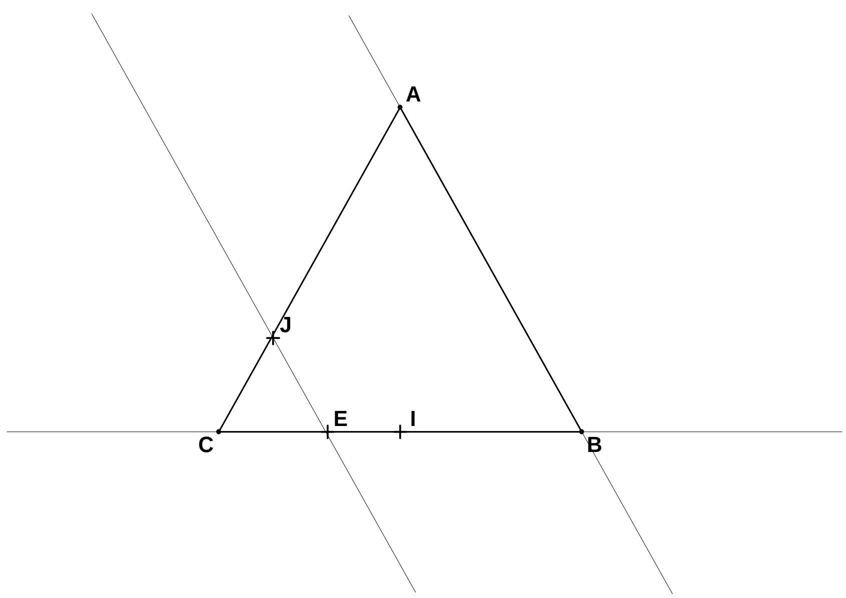
♣ *On considère la projection sur* (AB) *parallèlement à* (OB).

$$On\ a\ \overrightarrow{AO} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}\ et \begin{cases} p(A) = A \\ p(O) = B \\ p(D) = F \end{cases}$$

et comme la projection conserve le coefficient de colinéarité on obtient que : $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$.

2. *On a* $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AE}$ *et* $\overrightarrow{AB} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AF}$ *et par passage à la norme on obient :* $\left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \left|\frac{3}{4}\right|\left\|\overrightarrow{AE}\right\|$ *et* $\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left|\frac{3}{4}\right|\left\|\overrightarrow{AF}\right\|$ *c'est-à-dire* $AC = \frac{3}{4}AE$ *et* $AB = \frac{3}{4}AF$. *Donc* $\frac{AC}{AE} = \frac{3}{4}$ *et* $\frac{AB}{AF} = \frac{3}{4}$ *ce qui signifie que :* $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF}$.
   Dans le traingle AEF *on a les points* A, C *et* E *sont dans le même ordre que les points* A, B *et* F *et* $\frac{AC}{AE} = \frac{AB}{AF}$. *Donc d'après la réciproque du théorème de thalès on en déduit que* $(BC) \parallel (EF)$.

Exercice 3 .



1. *Montrons que :* $\overrightarrow{JE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.
   On considère la projection sur la droite (BC) *parallèlement à* (AB).

$$On\ a\ \overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AC},\ et : \begin{cases} p(A) = B \\ p(J) = E \\ p(C) = C \end{cases}$$

   comme la projection conserve le coefficient de colinéarité on obtient que : $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$.

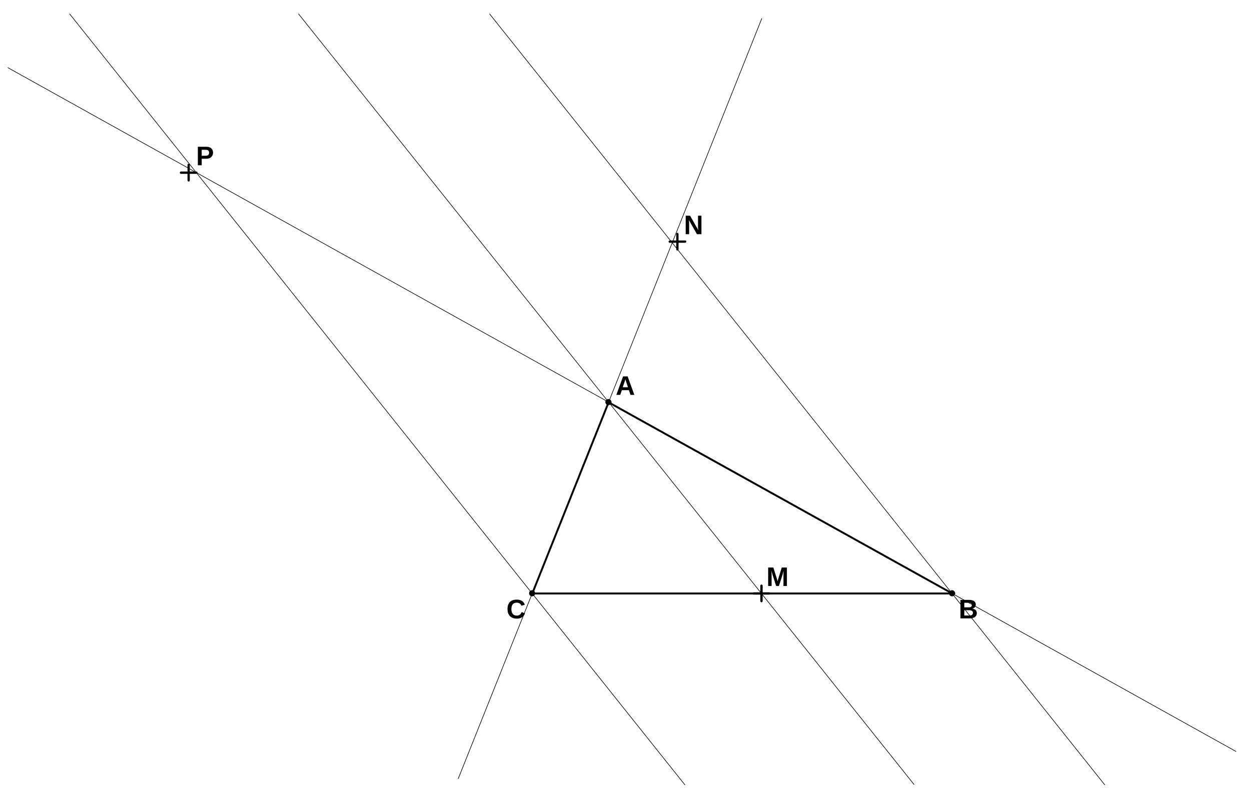
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{JE} &= \overrightarrow{JB}+\overrightarrow{BE}\\
&= \overrightarrow{JA}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\
&= -\overrightarrow{AJ}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

2. *Montrons que* : $\overrightarrow{IE}=\frac{1}{6}\overrightarrow{BC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IE} &= \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BE}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}\\
&= \frac{1}{6}\overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

Exercice 4 .



1. *Montrons que* : $\frac{MA}{BN}=\frac{CM}{CB}$ *et* $\frac{MA}{CP}=\frac{BM}{BC}$.

♣ *On considère le traingle BCP.*

On a $M \in (BC)$ et $A \in (BP)$ et comme $(AM) \parallel (PC)$ donc d'après le théorème direct de thalès on obtient

$$\frac{BM}{BC} = \frac{BA}{BP} = \frac{MA}{CP}$$

ceci signifie que : $\dfrac{MA}{CP} = \dfrac{BM}{BC}$.

♣ *On considère le traingle BCN.*

On a $M \in (BC)$ et $A \in (CN)$ et comme $(AM) \parallel (NB)$ donc d'après le théorème direct de thalès on obtient

$$\frac{CM}{CB} = \frac{CA}{CN} = \frac{MA}{BN}$$

ceci signifie que : $\dfrac{MA}{BN} = \dfrac{CM}{CB}$.

2. *On déduit que :* $\dfrac{1}{MA} = \dfrac{1}{BN} + \dfrac{1}{CP}$.

   On a $\dfrac{MA}{BN} = \dfrac{CM}{CB}$ *et* $\dfrac{MA}{CP} = \dfrac{BM}{BC}$, *alors*

$$MA \times CB = BN \times CM \quad et \quad MA \times BC = CP \times BM$$

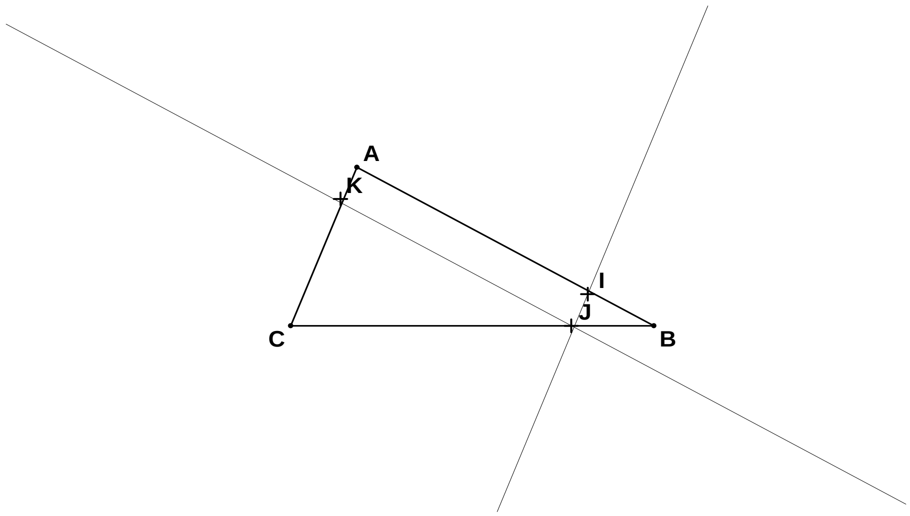
   c'est-à-dire $BN = \dfrac{MA \times CB}{CM}$ *et* $CP = \dfrac{MA \times BC}{BM}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{BN} + \frac{1}{CP} &= \frac{1}{\frac{MA \times CB}{CM}} + \frac{1}{\frac{MA \times BC}{BM}} \\
&= \frac{CM}{MA \times CB} + \frac{BM}{MA \times BC} \\
&= \frac{CM + BM}{MA \times CB} \\
&= \frac{CB}{MA \times CB} \\
&= \frac{1}{MA}
\end{aligned}$$

   ce qui signifie que

$$\frac{1}{MA} = \frac{1}{BN} + \frac{1}{CP}.$$

Exercice 5 .



♣ *On considère la projection sur la droite* (BC) *parallèlement à* (AC) .

$$\text{On a } \overrightarrow{AI} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} \text{ et : } \begin{cases} p(A) = C \\ p(I) = J \\ p(B) = B \end{cases}$$

et comme la projection conserve le coefficient de colinéarité alors : $\overrightarrow{CJ} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{CB}$.

♣ *On considère le projection sur la droite* (AC) *parallèlement à* (AB) .

$$\text{On a } \overrightarrow{CJ} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CB} \text{ et : } \begin{cases} p(C) = C \\ p(J) = K \\ p(B) = A \end{cases}$$

et comme la projection conserve le coefficient de colinéarité alors on obtient :

$$\overrightarrow{CK} = \frac{3}{4}\overrightarrow{CA}.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**