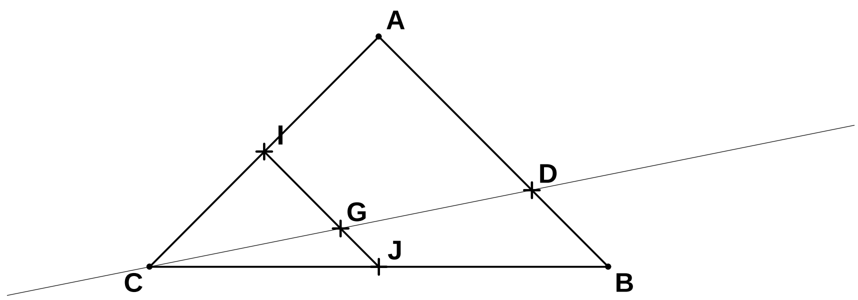
Correction de la série

Exercice 1 .

1. *La figure.*



2. *Soit* G *le barycentre du système pondéré* $\{(A,1);(B,2);(C,3)\}$.
Calculons $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{AC}$.
On a d'après la propriété caractéristique
$$(\forall M \in (P)), \quad \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}+3\overrightarrow{MC}=6\overrightarrow{MG}$$
pour $M=A$, *on obtient*
$$2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}=6\overrightarrow{AG} \iff \overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$

3. **a)** *Montrons que les vecteurs* $\overrightarrow{IG}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires.*
On a I *est le milieu de* $[AC]$ *alors* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, *et comme* $\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *donc*
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AG} &= \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}\\ &\iff \overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &\iff \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{IA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\\ &\iff \overrightarrow{IG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

d'où les vecteurs $\overrightarrow{IG}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont coliénaires.*

b) *Montrons que les points* I, J *et* G *sont alignés.*

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\
&= -\overrightarrow{AI} + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}\right) \\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{-1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

et comme $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *alors* $\overrightarrow{AB} = 3\overrightarrow{IG}$ *donc*

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{3}{2}\overrightarrow{IG}$$

Ceci signifie que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{IG}$ *sont colinéaires, c'est-à-dire les points* I, J *et* G *sont alignés.*

4. *Soit* D *le point d'intersection des droites* (AB) *et* (CG).

Calculons $\overrightarrow{AD}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$.

On a I *est le milieu de* $[AC]$ *donc* $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$ *et par passage à la norme on obtient*

$$\left\|\overrightarrow{CI}\right\| = \left|\frac{1}{2}\right| \left\|\overrightarrow{CA}\right\|$$

c'est-à-dire $CI = \frac{1}{2}CA$.

Comme $(AD) \parallel (IG)$ *alors on applique le théorème de thalès direct dans le triangle* ACD *on obtient :*

$$\frac{CI}{CA} = \frac{CG}{CD} = \frac{IG}{AD}$$

comme $\frac{CI}{CA} = \frac{1}{2}$ *alors* $\frac{IG}{AD} = \frac{1}{2}$ *donc* $IG = \frac{1}{2}AD$ *et puisque les vecteurs* $\overrightarrow{IG}$ *et* $\overrightarrow{AD}$ *ont le même sens donc on obtient*

$$\overrightarrow{IG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \qquad (*)$$

on sait que $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ *et d'après* $(*)$ *on obtient*

$$\overrightarrow{AD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$$

Exercice 2 .

G est le barycentre du système pondéré $\left\{(A,1)\,;(B,2)\,;\left(C,\dfrac{-3}{2}\right)\right\}$.

1. **a)** *Montrons que :* $\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

   On a d'après la propriété caractéristique

$$(\forall M\in(P))\,,\ \overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{MC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{MG}$$

   pour $M=A$*, on obtient*

$$2\overrightarrow{AB}-\frac{3}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AG}\iff\overrightarrow{AG}=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$$

   b) *Montrons que* $ACIG$ *est un parallèlogramme.*

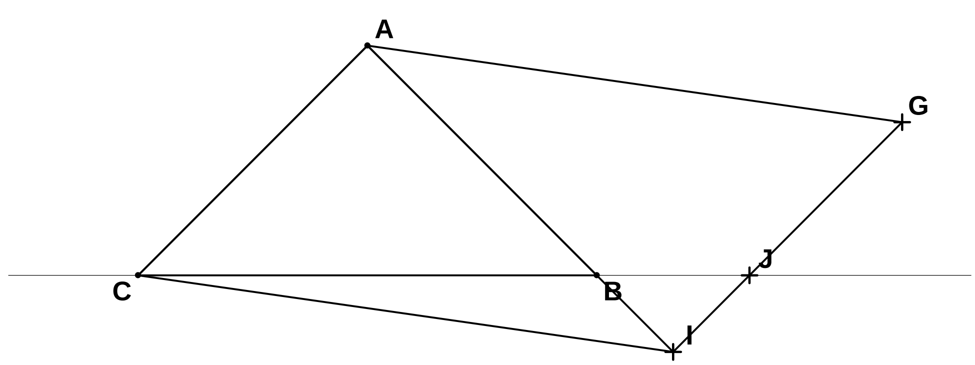
   On a

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CI}&=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AI}\\&=-\overrightarrow{AC}+\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}\\&=\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

   comme $\overrightarrow{AG}=\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$ *donc* $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AG}$*. Ceci signifie que le quadrilatère* $ACIG$ *est un parallèlogramme.*

2. *Soit* J *le point d'intersection de* (IG) *et* (BC).

   a) *Calculons* $\overrightarrow{BJ}$ *en fonction* $\overrightarrow{BC}$.



On a $(IJ) \parallel (AC)$ *donc d'après le théorème de thalès direct on a* $\dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{BI}{BA}$ $(*)$
D'autre part, on a

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{AI} & = & \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} \\ & \iff & \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BI} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} \\ & \iff & \overrightarrow{BI} = \dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} \\ & \iff & \overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}\end{array}$$

par passage à la norme on obtient $BI = \dfrac{1}{3}AB$ *donc* $\dfrac{BI}{AB} = \dfrac{1}{3}$ *et d'après* $(*)$ *on obtient* $\dfrac{BJ}{BC} = \dfrac{1}{3}$ *alors*

$$BJ = \frac{1}{3}BC$$

comme les vecteurs $\overrightarrow{BJ}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ont un sens opposés donc*

$$\overrightarrow{BJ} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

b) *Montrons que :* $\overrightarrow{GJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

On a

$$\begin{array}{rcl}\overrightarrow{GJ} & = & \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BJ} \\ & = & \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\ & = & -\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ & = & -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC} \\ & = & -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ & = & -\dfrac{4}{3}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ & = & \overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\ & = & \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}\end{array}$$

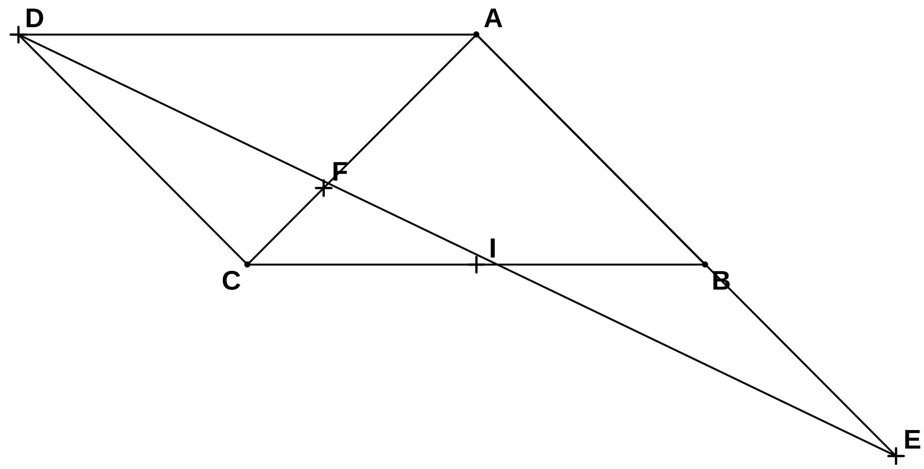
♣ *On déduit que* G *est le barycentre du système* $\{(A,2)\,;(J,3)\,;(C,-2)\}$.

On a $\overrightarrow{GJ} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}$ *donc*

$$\overrightarrow{GJ} = \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GC}\right) \iff \overrightarrow{GJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{GA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{GC} \iff 3\overrightarrow{GJ} + 2\overrightarrow{GA} - 2\overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}$$

puisque $(3 + 2 - 2 \neq 0)$ *donc* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2)\,;(J,3)\,;(C,-2)\}$

Exercice 3 .



1. *Montrons que :* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$.

   On a D *est le barycentre du système pondéré :* $\{(A,1)\,;(B,-1)\,;(C,1)\}$.

   On a d'après la propriété caractéristique

$$(\forall M \in (P)),\ \overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MD}$$

   pour $M = A$, *on obtient*

$$-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} \iff \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$$

   Ceci signifie que le quadrilatère $ABCD$ *est un parallèlogramme.*

2. *Montrons que :* $\overrightarrow{IE} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{IF} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}$.

   ♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IE} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AE} \\
&= \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

♣ *On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IF} &= \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AF}\\
&= \overrightarrow{IB}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\\
&= \frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

3. *Montrons que I est le milieu du segment $[DE]$.*

   On montre que : $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IE}$.

   On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DI} &= \overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FI}\\
&= \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{IF}\\
&= \overrightarrow{CB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\left(\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\right)\\
&= \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}\\
&= -\overrightarrow{AC}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\\
&= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}\\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{IE}
\end{aligned}$$

   donc $\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{IE}$. Ceci signifie que I est le milieu du segment $[DE]$.

4. *On déduit que les points I, E, F et D sont alignés.*

   On a I est milieu du segment $[DE]$ donc I, D et E sont alignés. (1)

   On a $\overrightarrow{IE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{IF}=\frac{-1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{6}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{IE}=-3\overrightarrow{IF}$ d'où les points I, E et F sont alignés. (2)

   D'après (1) *et* (2) *on déduit que les points I, E, F et D sont alignés.*

Exercice 4 .

1. *Vérifions que B est le milieu du segment $[CE]$.*

   On a E est le barycentre du système pondéré $\{(B,2);(C,-1)\}$. On a d'après la propriété caractéristique

$$(\forall M\in(P)),2\ \overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{ME}$$

pour $M = B$, *on obtient*

$$-\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} \iff \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BE}$$

ceci signifie que B *est le milieu du segment* $[CE]$.

2. **a)** *On exprime* $\overrightarrow{AG}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ *et* $\overrightarrow{AD}$.

On a G *est le barycentre du système pondéré* $\{(B,2)\,;(C,-1)\,;(D,2)\}$ *donc d'après la propriété caractéristique*

$$(\forall M \in (P))\,,\ 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} + 2\overrightarrow{MD} = 3\overrightarrow{MG}$$

pour $M = A$ *on obtient*

$$2\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG} \iff \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

donc

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$$

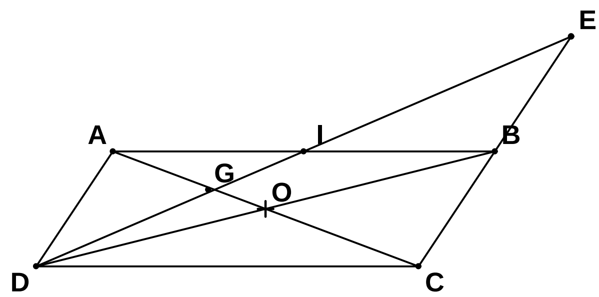
♣ *On a* $ABCD$ *est un parallèlogramme alors* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ *et comme* $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AG} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{2}{3}\left(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AC}\right) - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} \\
&= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

donc

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

b) *Figure.*



c) *Montrons que G est le centre de gravité du triangle ABD.*

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{GA}+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}\right)+\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AD}\right)\\
&= 3\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\
&= -\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\\
&= -\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}\\
&= -\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AC}\\
&= \overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

donc le point G est le centre de gravité du triangle ABD.

3. *Montrons que les points D, G et E sont alignés.*

   On a G est le barycentre du système $\{(B,2);(C,-1);(D,2)\}$ et E est la barycentre du système pondéré $\{(B,2);(C,-1)\}$ donc d'après l'associativité du barycentre G est le barycentre du système pondéré $\{(E,1),(D,2)\}$, ce qui signifie que $\overrightarrow{GE}+2\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{GE}=-2\overrightarrow{GD}$. Donc les points G, E et D sont alignés.

4. *Montrons que : $\overrightarrow{DG'}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{DB}$.*

   On a G est le barycentre du système pondéré $\{(B,2);(C,-1);(D,2)\}$ donc $p(G)$ est le barycentre du système pondéré $\{(p(B),2);(p(C),-1);(p(D),2)\}$ avec p est la projection sur la droite (DB) parallèlement à (DC). Comme $p(G)=G'$, $p(D)=D$, $p(C)=D$ et $p(B)=B$ alors G' est le barycentre du système pondéré $\{(B,2);(D,-1);(D,2)\}$ c'est-à-dire G' est le barycentre du système pondéré $\{(B,2);(D,1)\}$. D'après la propriété caractéristique du barycentre on a pour tout point M du plan :

$$2\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MD}=3\overrightarrow{MG'}$$

pour $M = D$ *donc*

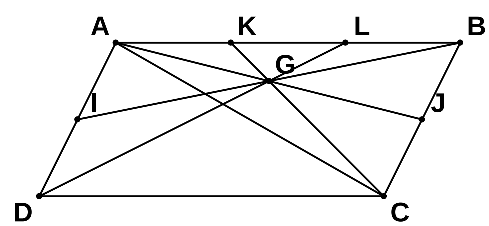
$$2\overrightarrow{DB} = 3\overrightarrow{DG'} \iff \overrightarrow{DG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$$

d'où

$$\overrightarrow{DG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DB}$$

Exercice 5 .

1. *La figure.*



2. **a)** *Montrons que* G *est le milieu du segment* $[AJ]$.

   On a J *est le milieu du segment* $[BC]$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}$ *. Donc* J *est le barycentre du système pondéré* $\{(B,1)\,;(C,1)\}$ *et comme* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2)\,;(B,1)\,;(C,1)\}$ *et d'après l'associativité du barycentre on déduit que* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,2)\,;(J,2)\}$ *par ailleurs* G *est le barycentre du système pondéré* $\{(A,1)\,;(J,1)\}$ *. Ceci signifie que* G *est le milieu du segment* $[AJ]$ *.*

   b) *On déduit que les droites* (AJ) *et* (BI) *sont sécantes en* G*.*

   On a G *est le braycentre du système pondéré* $\{(A,2)\,;(B,1)\,;(C,1)\}$ *donc d'après la propriété caractéristique on a pour tout point* M *du plan* (P) :

$$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = 4\overrightarrow{MG}$$

pour $M=B$ on obtient

$$
\begin{aligned}
2\overrightarrow{BA}+\underbrace{\overrightarrow{BC}}_{=\overrightarrow{AD}} &= 4\overrightarrow{BG} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}=4\overrightarrow{BG} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\underbrace{\overrightarrow{AI}}_{I\ milieu\ de\ [AD]}=4\overrightarrow{BG} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BI}=4\overrightarrow{BG} \\
&\Longleftrightarrow -2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AB}+2\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GI}\right)=4\overrightarrow{BG} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GI}-4\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow -2\overrightarrow{BG}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{GB}+2\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

comme $(1+1\neq 0)$ alors G est barycentre du système pondéré $\{(B,1);(I,1)\}$. Ceci signifie que $G\in(BI)$ et comme $G\in(AJ)$ donc on déduit que les droites (AJ) et (BI) sont sécantes en G.

3. **a)** *Montrons que G est la barycentre des points pondérés $(K,3)$ et $(C,1)$.*

On a $AK=LB$ et comme les vecteurs $\overrightarrow{AK}$ et $\overrightarrow{LB}$ ont le même sens on déduit que

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{AK} &= \overrightarrow{LB} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{LB}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{KB}\right)=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AK}-\left(\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}\right)=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow \overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KA}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{AK}-\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{0} \\
&\Longleftrightarrow 2\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}
$$

comme $(2+1\neq 0)$ alors K est le barycentre du système pondéré $\{(A,2);(B,1)\}$, et puisque G est le barycentre du système pondéré $\{(A,2);(B,1);(C,1)\}$ et d'après l'associativité du barycentre on déduit que G est le barycentre du système pondéré $\{(K,3);(C,1)\}$.

b) *On déduit que $G\in(CK)$.*

On a G est le barycentre du système pondéré $\{(K,3);(C,1)\}$ ceci signifie que $G\in(CK)$.

4. **a)** *Montrons que G est le barycentre des points pondérés $(D,1)$ et $(L,3)$.*

On a G est le barycentre du système pondéré $\{(K,3);(C,1)\}$ donc

$$\begin{aligned}
3\overrightarrow{GK}+\overrightarrow{GC} &= \overrightarrow{0}\\
&\iff 3\left(\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{LK}\right)+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{GC}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+3\overrightarrow{LK}+\left(\overrightarrow{GD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{LK}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}+3\overrightarrow{LK}+3\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{0}\\
&\iff 3\overrightarrow{GL}+\overrightarrow{GD}=\overrightarrow{0}
\end{aligned}$$

comme $(3+1\neq 0)$ alors G est le barycentre du système pondéré $\{(L,3);(D,1)\}$.

b) *Montrons que les droites (AJ), (BI), (CK) et (DL) sont concourantes en G.*

On a G est le barycentre du système pondéré $\{(L,3);(D,1)\}$. Ceci signifie que $G\in(DL)$. D'autre part G appartient à (AJ) et (BI) et (CK). Donc le point G appartient aux 4 droites (AJ), (BI), (CK) et (DL) ce qui prouve que ces 4 droites sont concourantes au point G.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude − generale.com