Correction de la série

Exercice 1 .

Dans le plan (P) rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$, on considère les points :

$$A(-1,2), \quad B(5,-2) \quad , \quad C(6,3) \quad et \quad E(-2,-3)$$

1. *Soit (Δ) la droite passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}(3,-2)$.*

   a) *On cherche une équation cartésienne de la droite (Δ).*
   Soit $M(x,y)$ un point du plan.
   $M \in (\Delta)$ ceci signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{u}$ sont colinéaires c'est-à-dire $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) = 0$ et comme $\overrightarrow{AM}(x+1, y-2)$ et $\overrightarrow{u}(3,-2)$. Donc

$$\begin{aligned}
\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u}\right) &= 0 \\
eq \quad : \quad & \begin{vmatrix} x+1 & 3 \\ y-2 & -2 \end{vmatrix} = 0 \\
eq \quad : \quad & -2(x+1) - 3(y-2) = 0 \\
eq \quad : \quad & -2x - 2 - 3y + 6 = 0 \\
eq \quad : \quad & -2x - 3y + 4 = 0
\end{aligned}$$

   D'où l'équation cartésienne de la droite (Δ) est : $-2x - 3y + 4 = 0$.

   b) *On cherche une représentation paramétrique de (Δ) :*
   La droite (Δ) passe par le point $A(-1,2)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$ donc une représentation paramétrique de (Δ) est : $\begin{cases} x = -1 + 3t \\ y = 2 - 2t \end{cases} \quad / \quad (t \in \mathbb{R})$.

   c) *Montrons que $B \in (\Delta)$.*
   On a $B(5,-2)$ alors

$$\begin{aligned}
-2x_B - 3y_B + 4 &= -2 \times 5 - 3 \times (-2) + 4 \\
&= -10 + 6 + 4 \\
&= -10 + 10 = 0
\end{aligned}$$

   donc $B \in (\Delta)$.

d) *On cherche F le point d'intersection de (Δ) avec (OY).*

$$F(x,y) \in (\Delta)\cap(OY) \quad eq : \begin{cases} -2x-3y+4=0 \\ \\ x=0 \end{cases}$$

$$eq : \begin{cases} -3y+4=0 \\ \\ x=0 \end{cases}$$

$$eq : \begin{cases} y=\dfrac{4}{3} \\ \\ x=0 \end{cases}$$

Donc

$$(\Delta)\cap(OY)=\left\{F\left(0,\frac{4}{3}\right)\right\}$$

2. *Soit (D) la droite dont la représentation paramétrique est :* $\begin{cases} x=8t-2 \\ \\ y=6t-3 \end{cases} \; / \; (t\in\mathbb{R})$.

a) *On cherche une équation cartésienne de la droite (D).*
Soit $t\in\mathbb{R}$.
On a

$$\begin{cases} x=8t-2 \\ \\ y=6t-3 \end{cases} \iff \begin{cases} x+2=8t \\ \\ y+3=6t \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \dfrac{x+2}{8}=t \\ \\ \dfrac{y+3}{6}=t \end{cases}$$

donc on obtient $\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y+3}{6}$. *(On écrit cette équation sous la forme $ax+by+c=0$).*

$\dfrac{x+2}{8}=\dfrac{y+3}{6}$ *éq* : $\dfrac{3(x+2)}{24}=\dfrac{4(y+3)}{24}$ *éq* : $3x+6=4y+12$ *éq* : $3x-4y-6=0$

d'où l'équation cartésienne de la droite (D) est : $3x-4y-6=0$.

b) *Montrons que les droites (D) et (Δ) sont sécantes.*
On a $\overrightarrow{u}(3,-2)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et $\overrightarrow{v}(4,3)$ est un vecteur directeur de la droite (D). Calculons $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$.

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})=\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}=9+8=17\neq 0$$

ceci signifie que les droites (D) et (Δ) sont sécantes.

♣ *Notons M le point d'intersection des droites (D) et (Δ).*

$$M(x,y) \;\epsilon\; (D)\cap(\Delta) \quad \acute{e}q \;:\; \begin{cases} 3x-4y-6=0 \\ \\ -2x-3y+4=0 \end{cases}$$

$$\acute{e}q \;:\; \begin{cases} 6x-8y-12=0 \quad (1) \\ \\ -6x-9y+12=0 \quad (2) \end{cases}$$

on fait la somme des équations (1) *et* (2) *on obtient*

$$(6x-8y-12)+(-6x-9y+12)=0 \;\; \acute{e}q: \;\; -17y=0 \quad \acute{e}q: \quad y=0$$

d'où

$$3x-4y-6=0 \;\; \acute{e}q: \;\; 3x-6=0 \;\; \acute{e}q: \;\; x=2$$

donc

$$(D)\cap(\Delta)=\{M(2,0)\}$$

c) *On trace dans le repère* $\left(O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\right)$ *les droites (D) et (Δ).*

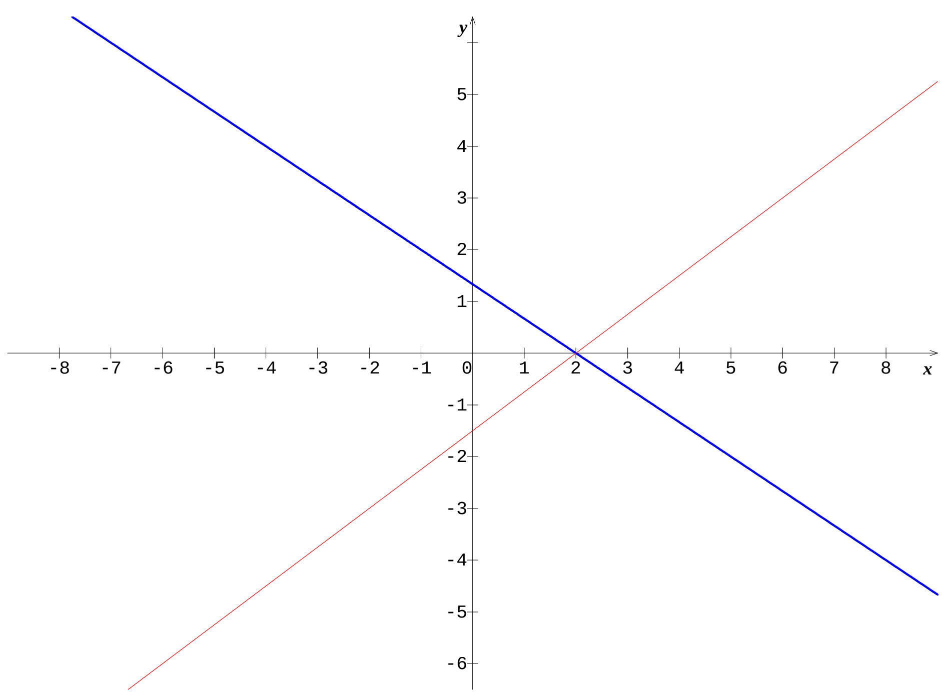
♣ *L'équation réduite de la droite (Δ) :*

$$-2x-3y+4=0 \iff -3y=2x-4 \iff y=-\frac{2}{3}x+\frac{4}{3}$$

♣ *L'équation réduite de la droite (D) :*

$$3x-4y-6=0 \iff -4y=-3x+6 \iff y=\frac{3}{4}x-\frac{6}{4}$$

Donc



Exercice 2 .

Dans le plan (P) *muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *on considère les points* $A(-1,2)$, $B(4,4)$ *et* $C(2,-1)$.

1. *On cherche les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.
   On a $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A, y_B - y_A)$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{AB}(4+1, 4-2)$ *donc* $\overrightarrow{AB}(5,2)$. *De même on a* $\overrightarrow{BC}(x_C - x_B, y_C - y_B)$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{BC}(2-4, -1-4)$ *donc* $\overrightarrow{BC}(-2,-5)$. *Calculons* $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right)$.

$$\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}\right) = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -15 + 8 = -7 \neq 0$$

   ceci signifie que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$ *ne sont pas colinéaires. Donc les points* A, B *et* C *ne sont pas alignés.*

2. *Montrons que le traingle* ABC *est isocèle.*
   On a $AB = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$ *et* $BC = \sqrt{(-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{29}$. *ce qui signifie que* $AB = BC$ *donc le traingle* ABC *est isocèle.*

3. *Soit* (Δ) *la droite définie par :* $(\Delta) : x - \frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = 0$

   a) *Montrons que* $C \in (\Delta)$.

$$x_C - \frac{5}{2}y_C - \frac{9}{2} = 2 - \frac{5}{2} \times (-1) - \frac{9}{2} = 0$$

   donc $C \in (\Delta)$.

   b) *L'équation réduite de* (Δ) :

$$x - \frac{5}{2}y - \frac{9}{2} = 0 \iff -\frac{5}{2}y = -x + \frac{9}{2} \iff y = \frac{2}{5}x - \frac{9}{2} \times \frac{2}{5} \iff y = \frac{2}{5}x - \frac{9}{5}$$

   c) *On cherche l'équation réduite de la droite* (Δ').
   L'équation réduite de la droite (Δ') *s'écrit sous la forme* $y = mx + p$.
   Comme les droites (Δ) *et* (Δ') *sont perpendiculaires, donc*

$$m \times \frac{2}{5} = -1 \quad \text{éq : } m = \frac{-1}{\frac{2}{5}} = \frac{-5}{2}$$

   d'où

$$(\Delta') : y = \frac{-5}{2}x + p$$

   on a $A \in (\Delta')$ *alors :* $p = y_A + \frac{5}{2}x_A = 2 + \frac{5}{2} \times (-1) = -\frac{1}{2}$. *Donc*

$$(\Delta') : y = \frac{-5}{2}x - \frac{1}{2}$$

4. Soit (D) la droite définie par : $\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 3 \end{cases}$ $/ \ (t \in \mathbb{R})$.

a) *L'équation cartésienne de la droite (D).*

Soit $t \in \mathbb{R}$.

On a

$$\begin{cases} x = 2t - 3 \\ y = 3t - 3 \end{cases} \quad \text{éq} \ : \ \begin{cases} x + 3 = 2t \\ y + 3 = 3t \end{cases}$$

$$\text{éq} \ : \ \begin{cases} \dfrac{x+3}{2} = t \\ \dfrac{y+3}{3} = t \end{cases}$$

donc on obtient $\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+3}{3}$. *(On écrit cette équation sous la forme $ax + by + c = 0$).*

$\dfrac{x+3}{2} = \dfrac{y+3}{3}$ *éq* : $\dfrac{3(x+3)}{6} = \dfrac{2(y+3)}{6}$ *éq* : $3(x+3) = 2(y+3)$ *éq* : $3x - 2y + 3 = 0$

d'où l'équation cartésienne de la droite (D) est : $3x - 2y + 3 = 0$.

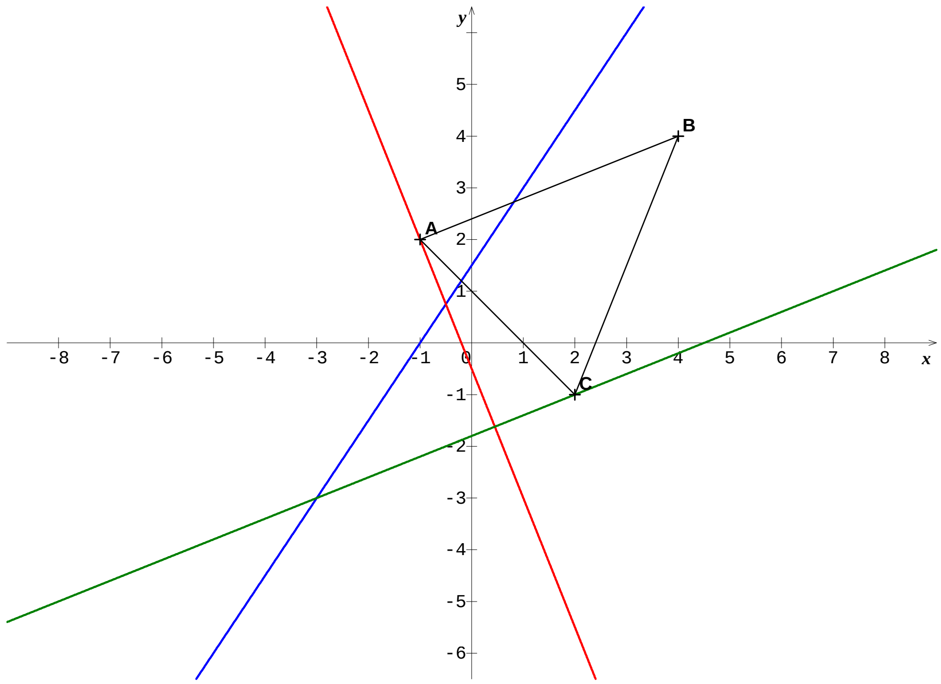
b) *Montrons que les droites (Δ) et (D) sont sécantes.*

On a $\overrightarrow{u}\left(\dfrac{5}{2}, 1\right)$ est un vecteur directeur de la droite (Δ) et $\overrightarrow{v}\,(2,3)$ est un vecteur directeur de la droite (D). Calculons $\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

$$\det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} \dfrac{5}{2} & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{2} \times 3 - 2 \times 1 = \frac{11}{2} \neq 0$$

Donc les droites (Δ) et (D) sont sécantes.

c)



Exercice 3 .

On considère les points : $A(-2,1)$ *et* $B(2,4)$.

1. *On cherche une équation cartésienne de* (D) .

   Soit $M(x,y)$ *un point du plan.*

   $M \in (\Delta)$ *ceci signifie que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{u}$ *sont colinéaires c'est-à-dire* $\det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}\right) = 0$ *et comme* $\overrightarrow{AM}(x+2,y-1)$ *et* $\overrightarrow{u}(5,2)$. *Donc*

$$\begin{array}{rcl} \det\left(\overrightarrow{AM},\overrightarrow{u}\right) & = & 0 \\ eq & : & \begin{vmatrix} x+2 & 5 \\ y-1 & 2 \end{vmatrix} = 0 \\ eq & : & 2(x+2)-5(y-1)=0 \\ eq & : & 2x+4-5y+5=0 \\ eq & : & 2x-5y+9=0 \end{array}$$

   D'où l'équation cartésienne de la droite (D) *est :* $2x-5y+9=0$.

2. *Soit* m *un réel et* (D_m) *la de droite d'équation :* $(D_m) : (m-1)x - 2my + 3 = 0$.

   a) *On cherche la valeur de* m *pour que* $(D_m) \parallel (D')$:

   Soit $m \in \mathbb{R}$.

On a $\overrightarrow{u}\,(2m,(m-1))$ *est un vecteur directeur de* (D_m). $\overrightarrow{v}\left(-1,\dfrac{-2}{3}\right)$ *est un vecteur de la droite* (D').

$$\begin{array}{rcl} (D_m)\ //\ (D') & \acute{e}q & : \ \det\left(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}\right)=0 \\ & \acute{e}q & : \ \begin{vmatrix} 2m & -1 \\ m-1 & \frac{-2}{3} \end{vmatrix}=0 \\ & \acute{e}q & : \ 2m\times\left(\dfrac{-2}{3}\right)-(-1)\times(m-1)=0 \\ & \acute{e}q & : \ \dfrac{-4m}{3}+m-1=0 \\ & \acute{e}q & : \ \dfrac{-m}{3}-1=0 \\ & \acute{e}q & : \ \dfrac{-m-3}{3}=0 \\ & \acute{e}q & : \ m=-3 \end{array}$$

Pour que (D_m) *soit parallèle à la droite* (D') *il faut que* $m=-3$.

b) *On cherche la valeur de* m *pour que* $B\in(D_m)$:

Soit $m\in\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} B\ \epsilon\ (D_m) & \acute{e}q & : \ (m-1)\times 2-2m\times 4+3=0 \\ & \acute{e}q & : \ 2m-2-8m+3=0 \\ & \acute{e}q & : \ -6m+1=0 \\ & \acute{e}q & : \ m=\dfrac{1}{6} \end{array}$$

Pour que B *soit un point de* (D_m) *il faut que* $m=\dfrac{1}{6}$.

c) *Montrons que tous les droites* (D_m) *passent par un point fixe.*

Soit $m\in\mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} E\,(x,y)\ \epsilon\ (D_m) & \acute{e}q & : \ (m-1)\,x-2my+3=0 \\ & \acute{e}q & : \ mx-x-2my+3=0 \\ & \acute{e}q & : \ m\,(x-2y)+3-x=0 \\ & \acute{e}q & : \ \begin{cases} x-2y=0 \\ \\ 3-x=0 \end{cases} \\ & \acute{e}q & : \ \begin{cases} x=2y \\ \\ x=3 \end{cases} \\ & \acute{e}q & : \ \begin{cases} y=\dfrac{x}{2} \\ x=3 \end{cases} \\ & \acute{e}q & : \ \begin{cases} y=\dfrac{3}{2} \\ x=3 \end{cases} \end{array}$$

Donc toutes les droites (D_m) *passent par un point fixe* $E\left(3, \frac{3}{2}\right)$.

Exercice 4 .

Dans le plan (P) *muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$ *on considère les points :* $K\left(1, \frac{1}{2}\right)$, $M(a, 0)$ *tel que* $a \in \mathbb{R}$.

1. **a)** *On cherche les coordonnées des vecteurs* $\overrightarrow{MK}$ *et* $\overrightarrow{JM}$.

   On a $\overrightarrow{MK}(x_K - x_M, y_K - y_M)$ *et* $\overrightarrow{JM}(x_M - x_J, y_M - y_J)$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{MK}\left(1-a, \frac{1}{2}\right)$ *et* $\overrightarrow{JM}(a, -1)$.

   b) *Montrons que les points* J, M *et* K *sont alignés si et seulement si* $a = 2$.

   Les points J,M et K sont alignés si et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{MK}$ *et* $\overrightarrow{JM}$ *sont colinéaires si et seulement si* $\det\left(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{JM}\right) = 0$.
   comme

$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{MK}, \overrightarrow{JM}\right) &= 0 \quad \textit{éq} : \begin{vmatrix} 1-a & a \\ \frac{1}{2} & -1 \end{vmatrix} = 0 \\ \textit{éq} &: -(1-a) - a \times \frac{1}{2} = 0 \\ \textit{éq} &: -1 + a - \frac{a}{2} = 0 \\ \textit{éq} &: a = 2 \end{aligned}$$

   Donc les points J, M *et* K *sont alignés si et seulement si* $a = 2$.

2. *On suppose que* $a \neq 2$.

   a) *On cherche les valeurs de* a *telles que* JMK *rectangle en* K.

   Le triangle JMK *est rectangle en* K *alors d'après le théorème de pythagore on a*

$$JM^2 = JK^2 + MK^2$$

   et comme $JM^2 = a^2 + 1$, $MK^2 = (1-a)^2 + \frac{1}{4}$ *et* $JK^2 = \frac{5}{4}$ *donc*

$$\begin{aligned} JM^2 &= JK^2 + MK^2 \\ \textit{éq} &: a^2 + 1 = (1-a)^2 + \frac{3}{2} \\ \textit{éq} &: a^2 + 1 = 1 - 2a + a^2 + \frac{3}{2} \\ \textit{éq} &: 2a = \frac{3}{2} \\ \textit{éq} &: a = \frac{3}{4} \end{aligned}$$

   Pour que le triangle JMK *soit rectangle en* K *il faut que* $a = \frac{3}{4}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com