Correction de la série

Exercice 1 *Soit f la fonction numérique définie par :*

$$f(x)=\frac{\tan(\pi x)}{x-E(x)}$$

1. *On cherche D l'ensemble de définition de f :*

$$\begin{aligned} D &= \left\{x\in\mathbb{R}/\ \pi x\neq \frac{\pi}{2}+k\pi \text{ et } x-E(x)\neq 0\ /k\in\mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq \frac{1}{2}+k \text{ et } E(x)\neq x\ /k\in\mathbb{Z}\right\} \\ &= \left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq \frac{1}{2}+k \text{ et } x\notin\mathbb{Z}\ /k\in\mathbb{Z}\right\} \\ &= \mathbb{R}\backslash\left(\left\{\frac{1}{2}+k\ /\ k\in\mathbb{Z}\right\}\cup\mathbb{Z}\right) \end{aligned}$$

2. *Calculons* $\lim\limits_{x\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x)$.

Soit $x\in\left]0,\frac{1}{2}\right[$. On a $E(x)=0$. D'où $f(x)=\dfrac{\tan(\pi x)}{x}$.

On pose $X=x-\frac{1}{2}$. Donc

$$\tan(\pi x)=\tan\left(\pi\left(X+\frac{1}{2}\right)\right)=\tan\left(\pi X+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan(\pi X)}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \lim_{x\longrightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^-} f(x) &= \lim_{X\longrightarrow 0^-} -\frac{1}{\tan(\pi X)\left(X+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{X\longrightarrow 0^-} -\frac{1}{\frac{\tan(\pi X)}{\pi x}\times\pi X}\times\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)} \\ &= \lim_{X\longrightarrow 0^-} -\frac{1}{\frac{\tan(\pi X)}{\pi x}\times\pi X}\times\frac{1}{\left(X+\frac{1}{2}\right)} \\ &= +\infty \end{aligned}$$

Exercice 2 .

1. *Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par :*

$$f(x) = 1 - x.E\left(\frac{1}{x}\right)$$

■ *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\ |f(x)| < |x|\,.$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

$$|f(x)| = \left|1 - x.E\left(\frac{1}{x}\right)\right| = |x|\,.\left|\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right|$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} - 1 \quad &< \quad E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{x} \leq -E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 - \frac{1}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \\ &\Longrightarrow \quad -1 < \frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right) < 1 \\ &\Longrightarrow \quad \left|\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right| < 1. \end{aligned}$$

Donc

$$|x|\,.\left|\frac{1}{x} - E\left(\frac{1}{x}\right)\right| < |x|\,.$$

C'est-à-dire

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*)\,,\quad |f(x)| < |x|\,.$$

■ *La déduction :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)\,.$

Soit $x \in \mathbb{R}^*$.

On a

$$|f(x)| < |x| \iff -|x| < |f(x)| < |x|$$

comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} -|x| = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} |x| = 0$. *Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

2. *Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ par :* $g(x) = (\sin x)\,.E\left(\frac{1}{x}\right)$.

a) *Montrons que :* $(\forall x \in]0, \pi[)\,,\ \dfrac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \dfrac{\sin x}{x}$.

Soit $x \in]0, \pi[\,.$

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-1 \quad &< \quad E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \\ &\iff \quad \frac{\sin x}{x} - \sin x < (\sin x) . E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{\sin x}{x}\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \left]0, \pi\right[), \ \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}.$$

■ *Montrons que :* $(\forall x \in \left]-\pi, 0\right[), \ \dfrac{\sin x}{x} < g(x) \leq \dfrac{\sin x}{x} - \sin x.$

Soit $x \in \left]-\pi, 0\right[$.

On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{x}-1 \quad &< \quad E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x} \\ &\iff \quad \frac{\sin x}{x} \leq (\sin x) . E\left(\frac{1}{x}\right) < \frac{\sin x}{x} - \sin x.\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \left]-\pi, 0\right[), \ \frac{\sin x}{x} \leq g(x) < \frac{\sin x}{x} - \sin x.$$

b) *Déduction :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x)$.

On a

$$(\forall x \in \left]0, \pi\right[), \ \frac{\sin x}{x} - \sin x < g(x) \leq \frac{\sin x}{x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\sin x}{x} - \sin x = 1$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. *Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = 1.$$

D'autre part, on a

$$(\forall x \in \left]-\pi, 0\right[), \ \frac{\sin x}{x} < g(x) \leq \frac{\sin x}{x} - \sin x.$$

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} - \sin x = 1$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. *Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = 1.$$

D'où $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} g(x) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} g(x) = 1$. *C'est-à-dire :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} g(x) = 1$.

3. *Soit* h *la fonction numérique définie sur* $\mathbb{R}^*$ *par :*

$$h(x) = \frac{x - E(x)}{\sqrt{|x|}}$$

Calculons $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} h(x)$.

■ *Soit* $x \in \left]0,1\right[$, *on a* $E(x) = 0$. *Donc* $h(x) = \frac{x}{\sqrt{x}} = \sqrt{x}$. *D'où*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} h(x) = 0.$$

■ *Soit* $x \in \left]-1,0\right[$, *on a* $E(x) = -1$. *Donc* $h(x) = \dfrac{x+1}{\sqrt{-x}}$. *D'où*

$$\begin{aligned} \lim_{x \longrightarrow 0^-} h(x) &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x+1}{\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} \frac{-\left(\sqrt{-x}\right)^2}{\sqrt{-x}} + \frac{1}{\sqrt{-x}} \\ &= \lim_{x \longrightarrow 0^-} -\sqrt{-x} + \frac{1}{\sqrt{-x}} = +\infty \end{aligned}$$

Par suite h *n'admet pas une limite finie en* 0.

Exercice 3 .

Soit f *la fonction numérique définie par :*

$$f(x) = \sqrt{|x| - E(x)} - x$$

1. **a)** *On cherche l'ensemble de définition* D.

$$D = \{x \in \mathbb{R} / \ |x| - E(x) \geq 0\}$$

■ Si $x \in \left[0, +\infty\right[$. *Alors* $|x| = x$.
On a

$$\begin{aligned} x - 1 &< E(x) \leq x \\ &\Longleftrightarrow -x \leq -E(x) < 1 - x \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x - E(x) < 1 \end{aligned}$$

■ Si $x \in \left]-\infty, 0\right]$. *Alors* $|x| = -x$.
On a

$$\begin{aligned} x - 1 &< E(x) \leq x \\ &\Longleftrightarrow -2x \leq -x - E(x) < 1 - 2x \\ &\Longrightarrow 0 \leq -x - E(x) < 1 - 2x \end{aligned}$$

Donc

$$D = \mathbb{R}.$$

b) *Calculons* $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} f(x)$ *et* $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} f(x)$.

■ *Soit* $x \in \left[0, +\infty\right[$. *On a* $f(x) = \sqrt{x - E(x)} - x$.

On a

$$\begin{aligned} x-1 &< E(x) \leq x \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq x - E(x) < 1 \\ &\Longleftrightarrow 0 \leq \sqrt{x-E(x)} < 1 \\ &\Longleftrightarrow -x \leq \sqrt{x-E(x)} - x < 1 - x \\ &\Longleftrightarrow -x \leq f(x) < 1-x. \end{aligned}$$

D'où

$$(\forall x \in [0,+\infty[)\,,\ f(x) < 1-x$$

comme $\lim\limits_{x\longrightarrow+\infty} 1-x = -\infty$. *Alors d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a*

$$\lim_{x\longrightarrow+\infty} f(x) = -\infty.$$

■ *Soit* $x \in]-\infty, 0]$. *On a* $f(x) = \sqrt{-x-E(x)} - x$.
On a

$$\begin{aligned} x-1 &< E(x) \leq x \\ &\Longleftrightarrow -x \leq -E(x) < 1-x \\ &\Longleftrightarrow -2x \leq -x - E(x) < 1-2x \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{-2x} \leq \sqrt{-x-E(x)} < \sqrt{1-2x} \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{-2x} - x \leq \sqrt{-x-E(x)} - x < \sqrt{1-2x} - x \\ &\Longleftrightarrow \sqrt{-2x} - x \leq f(x) < \sqrt{1-2x} - x \end{aligned}$$

D'où

$$(\forall x \in]-\infty, 0])\,,\ \sqrt{-2x} - x \leq\ f(x)$$

comme $\lim\limits_{x\longrightarrow-\infty} \sqrt{-2x} - x = +\infty$. *Alors d'après les propriétés des limites et l'ordre, on a*

$$\lim_{x\longrightarrow-\infty} f(x) = +\infty.$$

2. *Soit* $k \in \mathbb{Z}$.

a) *La continuité de* f *à gauche et à droite au point* $x_0 = k$.

- *La continuité de* f *à droite en* k.
  Soit $x \in]k, k+1[$. *On a* $E(x) = k$. *Donc* $f(x) = \sqrt{|x| - k} - x$.
  D'où

  $$\lim_{x\longrightarrow k^+} f(x) = \lim_{x\longrightarrow k^+} \sqrt{|x|-k} - x = \sqrt{|k|-k} - k = f(k).$$

  Par suite la fonction f *est continue à droite de* k.
- *La continuité de* f *à gauche en* k.
  Soit $x \in]k-1, k[$. *On a* $E(x) = k-1$. *Donc* $f(x) = \sqrt{|x| - k + 1} - x$.
  D'où

  $$\lim_{x\longrightarrow k^-} f(x) = \lim_{x\longrightarrow k^-} \sqrt{|x|-k+1} - x = \sqrt{|k|-k+1} - k \neq f(k).$$

  Par suite la fonction f *n'est pas continue à gauche de* k

b) *La continuité de f sur $]k,k+1[$.*

On a

$$(\forall k \in]k,k+1[)\,,\quad f(x)=\sqrt{|x|-k}-x.$$

- *La fonction $u : x \longmapsto |x|-k$ est continue sur $]k,k+1[$ et pour tout $x \in]k,k+1[$: $u(x) \geq 0$. Donc la fonction $x \longmapsto \sqrt{u(x)}$ est continue sur $]k,k+1[$.*
- *La fonction $v : x \longmapsto -x$ est continue sur $]k,k+1[$.*

Donc la fonction $f = u+v$ est continue sur $]k,k+1[$ comme la somme de deux fonctions continues sur $]k,k+1[$.

Exercice 4 *Soit f la fonction numérique définie par :*

$$f(x)=\frac{1}{E\left(\dfrac{2}{x}\right)-1}$$

1. *On détermine D_f :*

$$D_f=\left\{x\in\mathbb{R}/\ x\neq 0 \ et\ E\left(\frac{2}{x}\right)-1\neq 0\right\}$$

On résout dans $\mathbb{R}$ l'équation : $E\left(\frac{2}{x}\right)-1=0$.

$$\begin{aligned}E\left(\frac{2}{x}\right)-1 &= 0\\ &\iff E\left(\frac{2}{x}\right)=1\\ &\iff 1\leq\frac{2}{x}<2\\ &\iff \frac{1}{2}<\frac{x}{2}\leq 1\\ &\iff 1<x\leq 2\\ &\iff x\in]1,2]\,.\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}D_f &= \{x\in\mathbb{R}/\ x\neq 0\ et\ x\notin]1,2]\}\\ &=]-\infty,0[\cup]0,1[\cup]2,+\infty[\,.\end{aligned}$$

a) *Montrons que : $(\forall x\in D_f)\,,\ \dfrac{2-2x}{x}<E\left(\dfrac{2}{x}\right)-1\leq\dfrac{2-x}{x}$.*

Soit $x\in D_f$.

On a

$$\begin{aligned} \frac{2}{x}-1 \quad &< \quad E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2-x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) \leq \frac{2}{x} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}. \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in D_f), \quad \frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$$

b) *Déduction :* $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x)$.

■ *Soit* $x \in \left]0,1\right[$, *on a :* $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$. *Puisque* $\frac{2-2x}{x} \succ 0$, *alors*

$$\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}.$$

Donc

$$(\forall x \in \left]0,1\right[), \ \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{2-x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^+} \frac{x}{2-2x} = 0$.*Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^+} f(x) = 0.$$

■ *Soit* $x \in \left]-\infty,0\right[$, *on a :* $\frac{2-2x}{x} < E\left(\frac{2}{x}\right) - 1 \leq \frac{2-x}{x}$. *Puisque* $\frac{2-2x}{x} < 0$, *alors*

$$\frac{x}{2-x} \leq \frac{1}{E\left(\frac{2}{x}\right) - 1} < \frac{x}{2-2x}.$$

Donc

$$(\forall x \in \left]-\infty,0\right[), \ \frac{x}{2-x} \leq f(x) < \frac{x}{2-2x}.$$

Comme $\lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x}{2-x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0^-} \frac{x}{2-2x} = 0$. *Donc d'après le théorème des gendarmes on obtient :*

$$\lim_{x \longrightarrow 0^-} f(x) = 0.$$

Donc on obtient

$$\lim_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0.$$

Exercice 5 .

1. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $E\left(\dfrac{E(nx)}{n}\right) = E(x)$.

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par :*

$$f(x) = E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) - E(x)$$

Montrons que la fonction f *est* 1 *périodique.*

■ *On a*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad (x+1) \in \mathbb{R}.$$

■ *Soit* $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} f(x+1) &= E\left(\frac{E(n(x+1))}{n}\right) - E(x+1) \\ &= E\left(\frac{E(nx+n)}{n}\right) - (E(x)+1) \\ &= E\left(\frac{E(nx)+n}{n}\right) - E(x) - 1 \\ &= E\left(\frac{E(nx)}{n} + 1\right) - E(x) - 1 \\ &= E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) + 1 - E(x) - 1 \\ &= E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) - E(x) \\ &= f(x). \end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ f(x+1) = f(x).$$

D'où la fonction f *est* 1 *périodique. Il suffit de prouver qu'elle est nulle sur* $[0,1[$.

Soit $x \in [0,1[$, *alors* $0 \leq \dfrac{E(nx)}{n} < 1$ *et* $E(x) = 0$. *Donc*

$$(\forall x \in [0,1[), \ f(x) = 0.$$

Par périodicité on a $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}$. *Ceci siginifie que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad E\left(\frac{E(nx)}{n}\right) = E(x).$$

2. *Montrons que :* $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*)$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx)$.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx).$$

Montrons que la fonction f est $\frac{1}{n}$ périodique.

■ *On a*

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \quad \left(x + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}.$$

■ *Soit $x \in \mathbb{R}$.*

$$\begin{aligned}
f\left(x + \frac{1}{n}\right) &= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{1}{n} + \frac{k}{n}\right) - E\left(n\left(x + \frac{1}{n}\right)\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k+1}{n}\right) - E(nx + 1) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k+1}{n}\right) - E(nx) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) - 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) - 1 + E(x+1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) - 1 + E(x) + 1 \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) + E\left(x + \frac{0}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) - E(nx) \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Donc

$$(\forall x \in \mathbb{R}), \ f\left(x + \frac{1}{n}\right) = f(x).$$

D'où la fonction f est $\dfrac{1}{n}$ périodique. Il suffit de prouver qu'elle est nulle sur $\left[0, \dfrac{1}{n}\right[$.

Soit $x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right[$ *et* $k \in \{0, ..., n-1\}$. *Alors*

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad x < \frac{1}{n} \quad et \quad 0 \leq k \leq n-1 \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leq x < \frac{1}{n} \ \ et \ 0 \leq \frac{k}{n} \leq 1 - \frac{1}{n} \\ &\Longrightarrow \quad 0 \leq nx < 1 \quad et \quad 0 \leq x + \frac{k}{n} < 1 \\ &\Longrightarrow \quad E(nx) = 0 \ \ et \ E\left(n + \frac{k}{n}\right) = 0. \end{aligned}$$

Donc

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{1}{n}\right[\right), \quad f(x) = 0.$$

Par périodicité on a $f = 0$ *sur* $\mathbb{R}$. *Ceci siginifie que :*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*), \quad \sum_{k=0}^{n-1} E\left(x + \frac{k}{n}\right) = E(nx).$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com