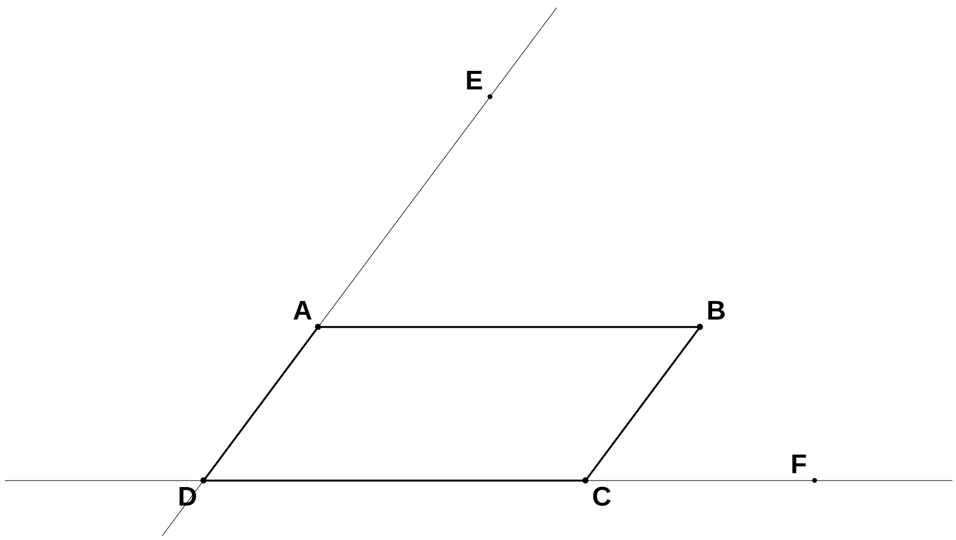
www.etude-generale.com **TCSI**
Matière : Mathématiques
Professeur : Yahya MATIOUI

Correction de la série

Exercice 1 .

Soit $ABCD$ un parallèlogramme E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{DE}=\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}$ *et* $\overrightarrow{DF}=\frac{5}{3}\overrightarrow{DC}$.



1. *Montrons que :* $\overrightarrow{BE}=\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BF}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{BC}$.

♣

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BE} &= \overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\\
&= \overrightarrow{BD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}\\
&= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}\\
&= -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DA}+\frac{5}{2}\overrightarrow{DA}\\
&= -\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DA}\left(-1+\frac{5}{2}\right)\\
&= -\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}\overrightarrow{DA}\\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

♣

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BF} &= \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{DF} \\
&= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC} + \frac{5}{3}\overrightarrow{DC} \\
&= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC}\left(-1 + \frac{5}{3}\right) \\
&= \overrightarrow{BC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}
\end{aligned}$$

2. *Exprimons les vecteurs* $\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{BF}$ *en fonction de* $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{BC}$.

   On a $\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{AB}$, *et comme* $ABCD$ *est un parallèlogramme alors* $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{CB}$, *donc*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{BE} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{AB} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

   De même on a $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{BC}$ *et comme* $ABCD$ *est un parallèlogramme alors* $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$, *donc*

$$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$$

3. *Montrons que :* $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$.

$$\begin{aligned}
2\overrightarrow{BE} &= 2\left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= -3\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{AB} \\
&= 3\left(-\overrightarrow{BC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)
\end{aligned}$$

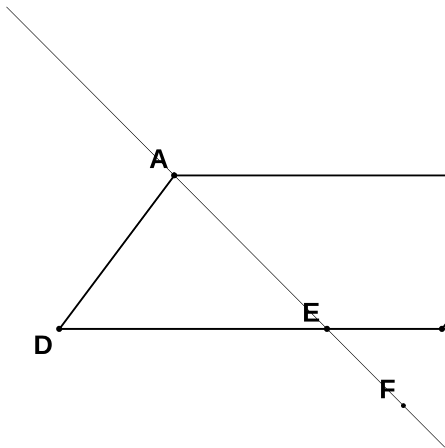
   comme $\overrightarrow{FB} = -\overrightarrow{BF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}$, *alors* $2\overrightarrow{BE} = 3\overrightarrow{FB}$ *donc*

$$\overrightarrow{BE} = \frac{3}{2}\overrightarrow{FB}$$

   On en déduit que les vecteurs $\overrightarrow{BE}$ *et* $\overrightarrow{FB}$ *sont colinéaires, ce qui signifie que les points* B, E *et* F *sont alignés.*

Exercice 2 .

Soit ABCD un parallèlogramme E et F deux points du plan tels que : $\overrightarrow{CE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CD}$ *et* $\overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AE}$.



1. **a)** *Montrons que :* $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FE} &= \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AE} \\
&= -\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{AE} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AE} \\
&= \frac{-1}{2}\overrightarrow{AE} \\
&= \frac{1}{3} \times \frac{-3}{2}\overrightarrow{AE} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{FA}.
\end{aligned}$$

b) *Montrons que :* $\overrightarrow{FC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}$.

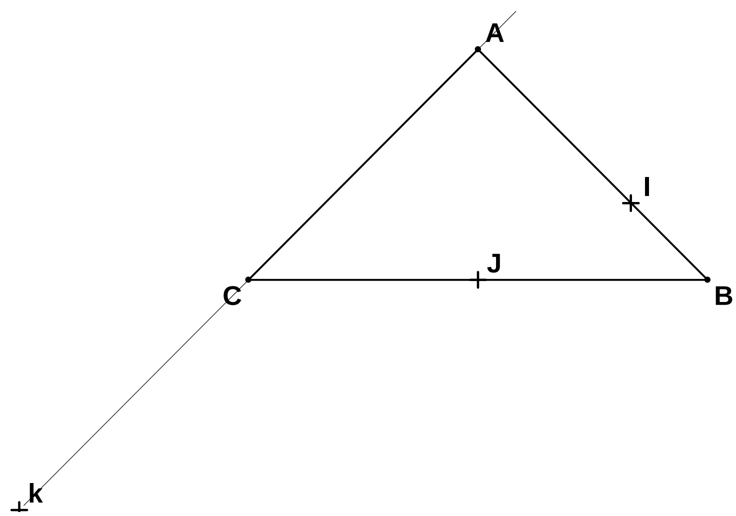
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{FC} &= \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EC} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{CE} \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{FA} - \frac{1}{3}\overrightarrow{CD} \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA} - \underbrace{\overrightarrow{CD}}_{\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BA}}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA} - \overrightarrow{BA}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&= \frac{1}{3}\overrightarrow{FB}.
\end{aligned}$$

2. *Les vecteurs* $\overrightarrow{FC}$ *et* $\overrightarrow{FB}$ *sont colinéaires, ceci signifie que les points* F, C *et* B *sont alignés.*

Exercice 3 .

Soit ABC *un triangle* I, J *et* K *trois points tels que :* $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et* $\overrightarrow{AK} = 2\overrightarrow{AC}$.

1.



2. *Montrons que :* $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{IJ} & = & \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AJ} \\
 & = & -\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} \\
 & = & \frac{-2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
 & = & \overrightarrow{AB}\left(\frac{-2}{3} + 1\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
 & = & \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
 & = & \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}.
\end{array}$$

3. *Montrons que :* $\overrightarrow{JK} = \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}$.

$$\begin{array}{rcl}
\overrightarrow{JK} & = & \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} \\
 & = & \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{AC} \\
 & = & -\overrightarrow{BJ} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} \\
 & = & -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + 2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) \\
 & = & -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AB} \\
 & = & \frac{3}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}
\end{array}$$

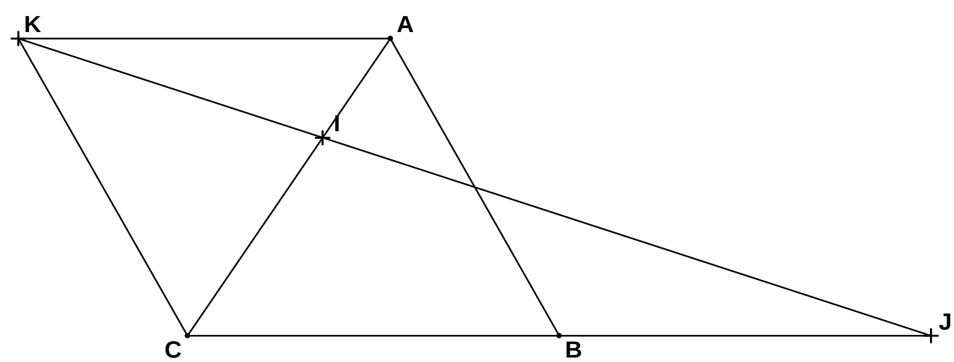
4. *On a*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{JK} &= \frac{3}{2}\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}\\ &= 3\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)\\ &= 3\overrightarrow{IJ}\end{aligned}$$

alors $\overrightarrow{JK}=3\overrightarrow{IJ}$, *donc les vecteurs* $\overrightarrow{JK}$ *et* $\overrightarrow{IJ}$ *sont colinéaires. Ce qui signifie que les points* I, J *et* K *sont alignés.*

Exercice 4 .

Soit ABC *un triangle* I, J *et* K *trois points tels que :* $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{BJ}=-\overrightarrow{BC}$.



1. **a)** *Montrons que :* $\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AJ} &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BJ}\\ &= \overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}\\ &= \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &= 2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

b) *On déduit que :* $\overrightarrow{IJ}=2\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{IJ} &= \overrightarrow{IA}+\overrightarrow{AJ}\\ &= -\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}\\ &= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{AB}-\frac{4}{3}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2. Soit K un point défini par : $\overrightarrow{AK} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$.

a) *Montrons que :* $\overrightarrow{IK} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IK} &= \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AK} \\
&= -\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \\
&= \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}
\end{aligned}$$

b) *On a*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{IJ} &= 2\overrightarrow{AB} - \frac{4}{3}\overrightarrow{AC} \\
&= -2\left(-\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right) \\
&= -2\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right) \\
&= -2\overrightarrow{IK}
\end{aligned}$$

ceci signifie que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ *et* $\overrightarrow{IK}$ *sont colinéaires. Donc les points* I, J *et* K *sont alignés.*

Exercice 5 *.*

Montrons que B est milieu du segment $[PQ]$.

Pour montrer que B est milieu de $[PQ]$ il suffit de montrer que $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$.

On a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{PB} &= \overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AB} \\
&= -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB} \\
&= -\left(\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CB}\right) + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\
&= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \\
&= -\frac{5}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC} - \frac{3}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CB} \\
&= \overrightarrow{AC}\left(\frac{-5}{2} + 1\right) + \overrightarrow{CB}\left(\frac{-3}{2} + 1\right) \\
&= \frac{-3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}$$

d'autre part, on a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{BQ} &= \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CQ} \\
&= \overrightarrow{BC} + \left(-2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\right) \\
&= \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BA}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \\
&= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} \\
&= -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\
&= -\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= -\frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}
\end{aligned}
$$

ceci signifie que $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{BQ}$*. Donc le point* B *est milieu de* $[PQ]$.

Exercice 6 .

Soit ABC *un triangle et* $k \in \mathbb{R}$ *et* E *et* F *deux points du plan tels que :*

$$\overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AF} = (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}.$$

1. *Montrons que les vecteurs* $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *sont colinéaires pour tout* $k \in \mathbb{R}$.

   Pour montrer que les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *sont colinéaires il suffit de montrer que* $\overrightarrow{EF} = \alpha\overrightarrow{CB}$ *avec* $\alpha \in \mathbb{R}$.

   On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{EF} &= \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF} \\
&= -\overrightarrow{AE} + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
&= -\left(3\overrightarrow{AB} + (1+k)\overrightarrow{AC}\right) + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
&= -3\overrightarrow{AB} - (1+k)\overrightarrow{AC} + (1+k)\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
&= -3\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} - k\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + k\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} \\
&= -2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC} + k\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&= 2\left(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}\right) + k\left(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\right) \\
&= 2\overrightarrow{BC} + k\overrightarrow{CB} \\
&= (k-2)\overrightarrow{CB}
\end{aligned}
$$

donc les vecteurs $\overrightarrow{EF}$ *et* $\overrightarrow{CB}$ *sont colinéaires pour tout* $k \in \mathbb{R}$.

2. *Calculons le valeur de* k *si* $E = F$.

   Si $E = F$, *alors* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{FF} = \overrightarrow{0}$, *et on a* $\overrightarrow{EF} = (k-2)\,\overrightarrow{CB}$ *donc*

$$\begin{aligned} (k-2)\,\overrightarrow{CB} &= \overrightarrow{0} \\ Eq &: \ k-2=0 \ ou \ \underbrace{\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}}_{impossible \ \ (C \neq B)} \\ Eq &: \ k=2 \end{aligned}$$

3. *Calculons la valeur de* k *pour que* $BCEF$ *soit un parallèlogramme.*

   $BCEF$ *est un parallèlogramme si et seulement si* $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{CB}$. *Comme* $\overrightarrow{EF} = (k-2)\,\overrightarrow{CB}$ *alors*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CB} &= (k-2)\,\overrightarrow{CB} \\ Eq &: \ \overrightarrow{CB} - (k-2)\,\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0} \\ Eq &: \ \overrightarrow{CB}\,(1-k+2) = \overrightarrow{0} \\ Eq &: \ \underbrace{\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{0}}_{impossible \ \ (C \neq B)} \quad ou \ \ 1-k+2=0 \\ Eq &: \ -k+3=0 \\ Eq &: \ k=3 \end{aligned}$$

Exercice 7 .

ABCD est un parallèlogramme et E est le milieu de $[BC]$ *et* F *est le milieu de* $[CD]$.

Montrons que : $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$.

On a E *est le milieu de* $[BC]$ *et* F *est le milieu de* $[CD]$ *c'est-à-dire* $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ *et*

$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD}$. *Alors*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) + \left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \\
&= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\left(1 + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

Donc

$$\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}.$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com