Correction du devoir

Exercice 1 .

Le plan (P) *muni d'un repère orthonormé* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. *On considère les points* $A(3,0)$, $B(0,4)$.

1. *Montrons que* : $4x+3y-12=0$ *est une équation cartésienne de la droite* (D) *passant par* A *et* B :

   Soit $M(x,y)$ *un point du plan.*

   $M \in (D)$ *signifie que les vecteurs* $\overrightarrow{AM}$ *et* $\overrightarrow{AB}$ *sont colinéaires, c'est-à-dire* $\det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) = 0$ *et comme* $\overrightarrow{AM}(x-3,y)$ *et* $\overrightarrow{AB}(-3,4)$. *Donc*

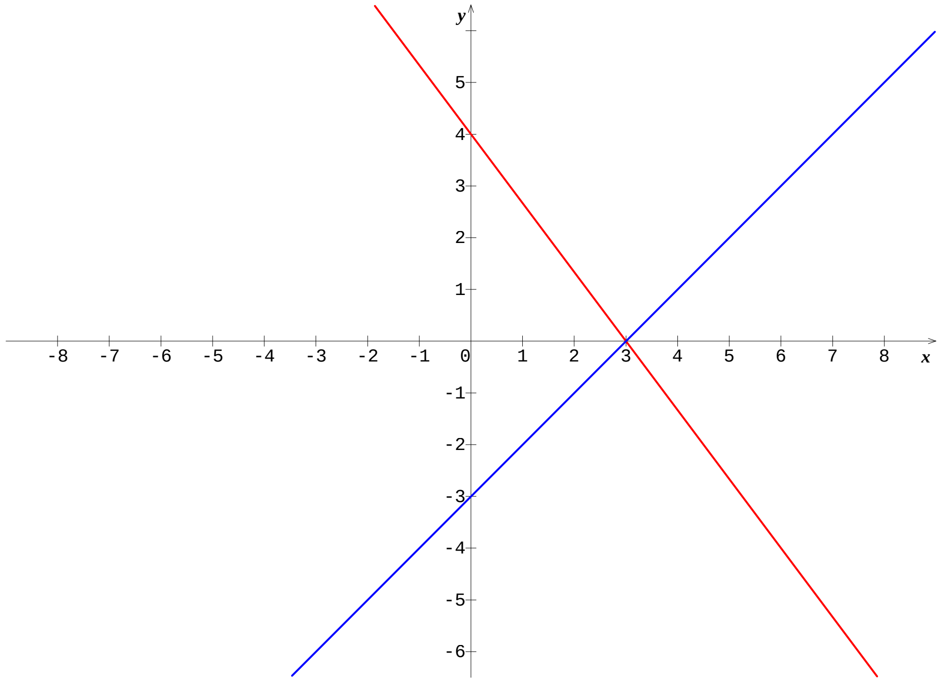
$$\begin{aligned} \det\left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}\right) &= 0 \\ \text{éq} &: \begin{vmatrix} x-3 & -3 \\ y & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \text{éq} &: 4(x-3)+3y=0 \\ \text{éq} &: 4x+3y-12=0 \end{aligned}$$

   D'où l'équation cartésienne de la droite (D) *est* : $4x+3y-12=0$.

2. *On trace la droite* (D) *dans le repère* $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$:

   ♣ *On cherche l'équation réduite de* (D) :

$$\begin{aligned} 4x+3y-12 &= 0 \\ \text{éq} &: 3y=-4x+12 \\ \text{éq} &: y=-\frac{4}{3}x+\frac{12}{3} \\ \text{éq} &: y=-\frac{4}{3}x+4 \end{aligned}$$



3. On considère la droite (Δ) *définie par sa représentation paramétrique* : $(\Delta) : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$ / $(t \in \mathbb{R})$.

a) *D'après la représentation paramétrique on déduit que* $\overrightarrow{u}\,(1,1)$ *est un vecteur directeur de la droite* (Δ) .

b) *Montrons que* (D) *et* (Δ) *sont sécantes.*

On a $\overrightarrow{u}\,(1,1)$ *est un vecteur directeur de la droite* (Δ) *et* $\overrightarrow{v}\,(-3,4)$ *est un vecteur directeur de la droite* (D). *Calculons* $\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v})$:

$$\det(\overrightarrow{u},\overrightarrow{v}) = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - (-3) \times 1 = 4 + 3 = 7 \neq 0$$

d'où les droites (D) *et* (Δ) *sont sécantes.*

♣ *Notons* $M\,(x,y)$ *le point d'intersection des droites* (D) *et* (Δ) .
On cherche d'abord l'équation cartésienne de la droite (Δ) .
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \end{cases}$$

$$\text{éq} \quad : \quad \begin{cases} x - 2 = t \\ y + 1 = t \end{cases}$$

donc on obtient : $x-2=y+1$ *(On écrit cette équation sous la forme* $ax+by+c=0$*).*

$$\begin{aligned} x-2 &= y+1 \\ \text{éq} &: \; x-y-2-1=0 \\ \text{éq} &: \; x-y-3=0 \end{aligned}$$

d'où l'équation cartésienne de la droite (Δ) *est :* $x-y-3=0$.
D'autre part, on a

$$M(x,y) \in (D)\cap(\Delta) \text{ éq} : \begin{cases} 4x+3y-12=0 \\ \\ x-y-3=0 \end{cases}$$

$$\text{éq} : \begin{cases} x-y-3=0 \\ \\ 4x+3y-12=0 \end{cases}$$

$$\text{éq} : \begin{cases} x=y+3 & (1) \\ \\ 4x+3y-12=0 & (2) \end{cases}$$

On remplace x *dans la* $2^{\text{éme}}$ *équation on obtient :*

$$\begin{aligned} 4(y+3)+3y-12 &= 0 \\ \text{éq} &: \; 4y+12+3y-12=0 \\ \text{éq} &: \; 7y=0 \\ \text{éq} &: \; y=0 \end{aligned}$$

On remplace y *par* 0 *dans la* $1^{\text{ère}}$ *équation*

$$x=y+3 \text{ éq} : \; x=0+3=3$$

Donc

$$(D)\cap(\Delta)=\{M(3,0)\}$$

c) *Voir la figure de la question* 2/.

Exercice 2 .

Soit m *un réel et* (d_m) *la droite d'équation :* $(m+3)x+(2m-1)y+m=0$.

1. *On cherche un vecteur directeur de* (d_m).

   Le vecteur $\overrightarrow{u}(-(2m-1), m+3)$ *est un vecteur directeur de la droite* (d_m).

2. *On cherche l'ensemble des valeurs* m *telles que :* $(d_m) \parallel (d)$ *:*

Soit $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} (d_m) \ // \ (d) \ \textit{éq} & : & \det(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 0 \quad / \quad \overrightarrow{v}(9,4) \ \textit{vecteur directeur de} \ (d) \\ \textit{éq} & : & \begin{vmatrix} -(2m-1) & 9 \\ m+3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ \textit{éq} & : & -4(2m-1) - 9(m+3) = 0 \\ \textit{éq} & : & -8m + 4 - 9m - 27 = 0 \\ \textit{éq} & : & -17m - 23 = 0 \\ \textit{éq} & : & m = -\dfrac{23}{17} \end{array}$$

donc pour que (d_m) *soit parallèles à* (d) *il faut, et il suffit que* $m = -\dfrac{23}{17}$. *Autrement dit l'ensemble des valeurs* m *telles que* (d_m) *soit parallèles à* (d) *est :* $\left\{-\dfrac{23}{17}\right\}$.

3. *Soit* $m \in \mathbb{R}$.

$$\begin{array}{rcl} A(1,1) \ \epsilon \ (d_m) \ \textit{éq} & : & (m+3) \times 1 + (2m-1) \times 1 + m = 0 \\ \textit{éq} & : & m + 3 + 2m - 1 + m = 0 \\ \textit{éq} & : & 4m + 2 = 0 \\ \textit{éq} & : & m = \dfrac{-2}{4} \\ \textit{éq} & : & m = \dfrac{-1}{2} \end{array}$$

donc pour que $A(1,1) \in (d_m)$ *il faut et il suffit que* $m = \dfrac{-1}{2}$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com