Série d'exercices sur les suites numériques N2

Exercice 1 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $[0,1]$ *par :* $(\forall x \in [0,1])\,,\ f_n(x) = x^n + x - 1.$

1. *Dresser le tableau de variation de* f_n *sur* $[0,1]$.
2. *Montrer que l'équation* $f_n(x) = 0$ *admet une solution unique* α_n *dans* $]0,1[$.
3. *Montrer que la suite* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente en précisant sa limite.*

Exercice 2 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,,\ f_n(x) = x^n + \arctan\left(\frac{x}{n}\right).$

1. *Montrer que :* $(\exists!\alpha_n \in \mathbb{R}^+)\,,\ f(\alpha_n) = 1.$
2. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,,\ 0 < \alpha_n < 1$ *et que :* $(\forall x \in]0,1[)\,,\ f_{n+1}(x) < f_n(x)$.
3. *En déduire la monotonie de* $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *puis montrer qu'elle est convergente.*
4. *Montrer que :* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n = 1.$

Exercice 3 .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, *on considère la fonction définie sur* $\mathbb{R}^+$ *par :* $f_n(x) = \arctan\left(\frac{x}{n}\right) + 2x - 1.$

1. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\exists!\alpha_n \in \mathbb{R}^+)\,,\quad f_n(\alpha_n) = 0.$
2. *Montrer que :* $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\,(\forall x \in \mathbb{R}^+)\,,\quad f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$.
3. *Etudier la monotonie de* (α_n) *et déduire qu'elle est convergente.*
4. *Calculer* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \frac{\alpha_n}{n}$, *puis déduire* $\lim\limits_{n\longrightarrow+\infty} \alpha_n$.

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

www.etude – generale.com