

Série d'exercices sur les ensembles de nombres

Exercice 1 .

Calculer :

$$A = \left(3 - \frac{1}{5} - \frac{4}{3}\right) \left(\frac{15}{3}\right) + \left(6 - \frac{2}{15}\right) \left(4 - \frac{7}{5} + \frac{2}{3}\right) \quad \text{et} \quad B = \frac{2 + \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{4}} \times \frac{1 + \frac{2}{5}}{\frac{4}{5} - 2} \times \frac{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}}{2 - \frac{1}{6}}$$

Exercice 2 .

1. Vérifier que : $(\sqrt{3} - 1)^2 = 4\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ et $(\sqrt{3} + 1)^2 = 4\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.
2. Dédire que : $A + B = 3$ tel que : $A = 1 + \sqrt{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}$ et $B = 1 - \sqrt{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}$.
3. Montrer que : $(A - 1)(B - 1) = -\frac{1}{2}$, puis déduire la valeur de AB .

Exercice 3 .

Simplifier les expressions suivantes :

$$A = \frac{7 \times (0,01)^3 \times 0,6^2}{12^2 \times 100^2 \times 25^{-1}} \quad \text{et} \quad B = \frac{0,0001^2 \times (-0,02)^3}{(1000^{-1})^4 \times (800^2)^3}$$

Exercice 4 .

Soit un réel non nul. On pose $A = a + \frac{1}{a}$.

Calculer en fonction de A les expressions suivantes : $a^2 + \frac{1}{a^2}$ et $a^3 + \frac{1}{a^3}$

Exercice 5 .

Soit a un réel tels que : $a \neq -1$ et $a \neq 1$.

Simplifier l'expression suivante :

$$A = \frac{1}{1-a} - \frac{1}{1+a} - \frac{2a}{1+a^2} - \frac{4a^3}{1+a^4} - \frac{8a^7}{1+a^8}$$

Exercice 6 .

Factoriser les expressions suivantes :

$$A = x^{12} - 2x^6 + 1, \quad B = 16x^2 - 8x + 1 \quad \text{et} \quad C = x^5 + x^3 - x^2 - 1$$

Exercice 7 .

1. Écrire le nombre $\frac{\sqrt{7} + \sqrt{3}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}$ sous la forme d'une écriture fractionnaire avec dénominateur rationnel.

2. Dédurre une simplification pour le nombre :

$$\sqrt{\frac{\sqrt{112} + \sqrt{48}}{\sqrt{7} - \sqrt{3}}}$$

Exercice 8 Soient a et b deux réels tels que : $0 < b \leq a$.

On pose :

$$A = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - b^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b^2}}$$

1. Calculer A^2 .

2. Dédurre une écriture simplifiée pour A .

3. Calculer le nombre : $\sqrt{5 + \sqrt{21}} + \sqrt{5 - \sqrt{21}}$.

Exercice 9 On considère l'expression suivante :

$$A = \frac{x^3y - xy^3}{x + y}$$

1. Calculer la valeur de A pour $x = 3\sqrt{7}$ et $y = 4\sqrt{5}$.

2. Donner une écriture simplifiée pour A .

Exercice 10 On rappelle que : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ et $\sqrt{6}$ sont irrationnels.

Montrer que :

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

2. $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 11 .

1. Soient a , b , c et d des nombres réels quelconques.

Montrer que :

$$(a^2 + b^2) \cdot (c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$$

2. Montrer que :

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{y-1} \leq \sqrt{xy}, \quad \text{pour tout } x \geq 1 \text{ et pour tout } y \geq 1.$$

Exercice 12 (L'inégalité de Cauchy-schwartz).

Soient a , b , c , x , y , et z des nombres réels quelconques.

Montrer que :

$$(a^2 + b^2 + c^2) \cdot (x^2 + y^2 + z^2) \geq (ax + by + cz)^2$$

FIN

Pr : **Yahya MATIOUI**

[www.etude – generale.com](http://www.etude-generale.com)